ОСОБЕННОСТИ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПЕРВОГО РОДА

С.Н. Одокиенко, *кандидат технических наук, доцент,*
Киевский национальный университет технологий и дизайна

Annotation. In the present work the features of application of quadrature algorithms to the solutions of Volterra integral equations of the first kind are researched.
Keywords: Volterra integral equations, quadrature algorithms.

В последние десятилетия наблюдается значительное расширение области приложения интегральных уравнений I рода типа Вольтерра. В круг многочисленных естественнонаучных приложений этого класса уравнений входят задачи восстановления сигналов, поступающих на входы измерительных приборов и систем наблюдения, которые в виду реальности своих характеристик вносят искажения в наблюдаемые и регистрируемые данные. По аналогии с данным классом уравнений в работе употребляется понятие динамической модели I рода.

Отличительная особенность данного класса задач заключается в проведении при их решении исследований на стыке традиционных численных методов и методов решения некорректных задач.

Одним из эффективных методов приближенного решения интегральных уравнений является метод квадратур [1], важным достоинством которого являются простота его реализации и высокая устойчивость вычислительных алгоритмов. Устойчивость при этом обеспечивается за счет регуляризирующих свойств метода, причем параметром регуляризации является шаг квадратуры.

Несмотря на существование большого количества квадратурных формул, выбрать нужную для решения уравнений Вольтера не просто, для этого в литературе нет завершенных, готовых для практики рекомендаций. Необходимо учесть, что выбор квадратурной формулы при решении уравнений должен быть согласован как со свойствами ядра, так и с характером искомого решения, что и порождает множество подходов и способов применения метода квадратур.

Известно, что при решении интегральных уравнений Вольтера наибольшее распространение получили формулы прямоугольников и трапеций, являющиеся формулами замкнутого типа. Необходимо отметить, что использование формулы левых и средних прямоугольников, а также трапеций для решения интегральных уравнений Вольтерра обеспечивают сходимость метода, благодаря специфическому соотношению весов указанных квадратур. Для пояснения данного утверждения рассмотрим решение интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x),\ \ a \le x \le b \qquad (1)$$

методом квадратур.

При согласовании определенным образом шага квадратуры с мерой точности исходных данных, а также при отсутствии погрешностей в задании ядра и правой части уравнения (1) метод квадратур, основанный на аппроксимации интеграла в уравнении (1) квадратурной формулой правых прямоугольников, также является сходящимся, т.е.

$$\max_{1\le x\le n}\left|\varphi(x_j)-\varphi_h(x_j)\right|_{h\to 0}\to 0;$$

где $\varphi(x_j)$- точное решение уравнения (1) в точке x_j, а $\varphi_h(x_j)$ удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$h\sum_{j=2}^{i}K(x_i,x_j)\cdot\varphi_h(x_j)=f(x_i),\quad i=\overline{2,n},$$

где $x_i=a+(i-1)\cdot h$, $x_j=a+(j-1)\cdot h$, $h=\dfrac{b-a}{n-1}=const$, h- шаг квадратуры, $K(x_i,x_j)$- ядро уравнения, $f(x_i)$- правая часть уравнения, $\varphi_h(x_j)$ - значение приближенного решения уравнения (1) в точке x_j.

При переносе этих же результатов на случай левых прямоугольников получаем скорость сходимости $\left|\varepsilon_h(x_j)\right|=\left|\varphi(x_j)-\varphi_h(x_j)\right|\le O(h)$, если $h\sum_{j=1}^{i-1}K(x_i,x_j)\cdot\varphi_h(x_j)=f(x_i),\quad i=\overline{2,n}$.

В случае средних прямоугольников, если

$$h\sum_{j=0}^{i-2}K\left(x_i,x_{j+\frac{1}{2}}\right)\cdot\varphi_h\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right)=f(x_i),\quad i=\overline{2,n},$$

где $h=\dfrac{b-a}{n-1}$, $x_i=a+(i-1)\cdot h$, $x_{j+\frac{1}{2}}=a+\left(j-\frac{1}{2}\right)\cdot h$, то скорость сходимости оценивается величиной h^2, т.е.

$$\left|\varepsilon_h\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right)\right|=\left|\varphi\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right)-\varphi_h\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right)\right|\le O(h^2).$$

Формула трапеций является промежуточной между квадратурными формулами прямоугольников и формул более высокого порядка точности (типа Грегори, Симпсона и др.). Несмотря на то, что веса в крайних узлах формулы трапеций отличны от весов в остальных узлах сетки, метод квадратур, основанный на формуле трапеций, является сходящимся. Следует отметить, что скорость сходимости, как и в случае средних прямоугольников, имеет порядок h^2. Анализ других квадратурных формул [2] показал отсутствие квадратурной формулы, имеющей алгебраический порядок точности выше единицы и порождающей сходящийся алгоритм решения уравнения (1).

Метод квадратурных сумм в случае использования квадратурных формул левых и средних прямоугольников, а также трапеций порождает сходящийся алгоритм приближенного решения уравнения (1) даже, если ядро или правая часть уравнения (1) заданы с погрешностью, в отличие от формул правых прямоугольников. Поэтому в случае, если возможно несовпадение узлов f и y (это имеет место при использовании формулы средних прямоугольников) и $h=const$ (в случае $h \neq const$ использование формулы средних прямоугольников затруднительно), то следует отдавать предпочтение формуле средних прямоугольников перед формулой трапеций.

Для однозначной разрешимости уравнения (1) на ядро уравнения $K(x,s)$, правую часть $f(x)$ и ее производную $f'(x)$ накладываются различные ограничения. В общем случае, уравнение (1) имеет в интервале $[a,b]$ единственное непрерывное решение, если функции $f(x)$ и $K(x,s)$ имеют непрерывные производные $f'(x)$, $\frac{\partial K}{\partial x}$ и $f(a)=0$, а $K(x,s)$ не обращается в нуль на $[a,b]$.

По результатам многочисленных вычислений, произведенных с применением программ [3], написанных в компьютерной среде моделирования Matlab, можно сделать следующие выводы. При решении интегральных уравнений Вольтерра I рода выбор квадратурной формулы должен производиться в зависимости от конкретных условий задачи, которые определяются свойствами ядра и характером искомого решения.

Список литературы:

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. - Киев: Наукова думка, 1986. - 544 с.
2. Апарцин А.С. Численное решение интегральных уравнений 1 рода типа Вольтерра. - Иркутск, 1981. - 26 с. - (Препринт/ СЭИ; № 1).
3. Одокиенко С.Н. Разработка комплекта программ исследования динамических систем на основе интегральных уравнений //«Моделювання та інформаційні технології», збірник наукових праць ІПМЕ. - Київ:ІПМЕ, 2006. - Вип. 37.- С.35-41.