

УДК 613.6

ДЗЮНДЗЮК Б.В., ПРОНЮК Г.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки  
**ОРГАНІЗАЦІЯ ЕРГОНОМІЧНИХ УМОВ ПРАЦІ ЗАСОБАМИ  
МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

**Мета.** *Рішення екстремальних задач, що виникають при плануванні виробництва, за допомогою математичного апарата дослідження операцій.*

**Методика.** *Для вирішення поставленої задачі використаний метод побудови  $\phi$ -функцій, які можна охарактеризувати як міри близькості об'єктів.*

**Результати.** *За допомогою апарату теорії  $\phi$ -функцій будується дерево рішень, листям якого є незалежні задачі лінійного програмування. Цільова функція визначає критерій оптимальності – мінімізацію площі або периметра, зайнятого робочими місцями. Обмеження на взаємне розташування робочих місць задаються за допомогою  $\phi$ -функцій, і описують область пошуку рішень.*

**Наукова новизна та практична значимість.** *Математичний апарат  $\phi$ -функцій розширено на задачі ергономізації умов праці, отримані рішення систем лінійних рівнянь дасть можливість оптимально розмістити робочі місця на мінімальній площі з дотриманням всіх норм і правил.*

**Ключові слова:** *дослідження операцій,  $\phi$ -функція, робочі місця, умови праці*

**Вступ.** Питання ергономіки робочих місць в задачах охорони праці відіграють величезну роль. Під робочим місцем розуміється місце в системі «людина-машина», оснащене засобами відображення інформації, органами керування й допоміжним устаткуванням, де здійснюється трудова діяльність конкретного фахівця. *Організацією робочого місця* називається проведення системи заходів щодо оснащення робочого місця засобами й предметами праці і їхньому розміщенню в певному порядку з метою оптимізації умов трудової діяльності, забезпечення безпеки, максимальної ефективності й надійності роботи людини.

Задачі оптимального розміщення об'єктів - один з найважливіших класів задач в дослідженні операцій. При розміщенні технологічного устаткування, виробничих підприємств, як правило, вимагається розташовувати їх на меншій площі, не хаотично, а з дотриманням певного порядку, з урахуванням безлічі диктованих державними нормативами обмежень.

Для вирішення поставленої задачі існує декілька способів, в даній роботі пропонується використовувати математичний апарат дослідження операцій, а саме, побудова  $\phi$ -функції [1], яку можна охарактеризувати як міру близькості об'єкту. Метою даної роботи є розробка методів рішення екстремальних задач, що виникають при плануванні виробництва з урахуванням вимог охорони праці і навколишнього середовища. Об'єкти, що підлягають розміщенню, розбиваються на безліч геометричних примітивів, таких як прямокутник, багатокутник і круг. За допомогою апарату теорії  $\phi$ -функцій будується дерево рішень, листям якого є незалежні задачі лінійного програмування. Кожна така підзадача складається з цільової функції і

системи лінійних обмежень, що оперують з мірою близькості об'єктів і імплементують обмеження моделі.

**Постановка завдання.** Устаткування і організація робочого місця повинні забезпечувати відповідність всіх його елементів і взаємного розташування всіх робочих місць ергономічним вимогам з урахуванням характеру і особливостей трудової діяльності. При проектуванні робочого місця необхідно виходити із аналізу конкретного трудового процесу, виконуваного людиною на даному устаткуванні, і враховувати антропометричні дані, фізіологічні й психологічні характеристики трудового процесу, санітарно-гігієнічні умови роботи. Таким чином, постановка задачі полягає у виборі математичного апарату дослідження операцій, який дозволить у відповідності з побудованою математичною моделлю, автоматично розрахувати оптимальне розміщення робочих місць з урахуванням вимог нормативних документів з охорони праці. Для вирішення поставленої задачі пропонується використовувати математичний апарат  $\varphi$ -функцій. Введемо декілька понять.

**Визначення 1.** Об'єкт  $T_i$ , трансльований на вектор  $u_i$  позначається як  $T_i(u_i) = \{X \in R^n \mid X = u_i + Y, Y \in T_i\}$ , де  $u_i \in R^n$ ,  $n = 2, 3$  - вектор параметрів розміщення об'єкту  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ .

**Визначення 2.** Безперервна і усюди визначена функція  $\varphi: R^{2n} \rightarrow R^1$ ,  $n = 2, 3$  називається  $\varphi$ -функцією об'єктів  $T_1(u_1)$  і  $T_2(u_2)$ , якщо вона задовольняє наступним характеристичним властивостям:

- $\varphi(u_1, u_1) > 0$ , якщо  $cl T_1(u_1) \cap cl T_2(u_2) = \emptyset$ ,
- $\varphi(u_1, u_1) = 0$ , якщо  $int T_1(u_1) \cap int T_2(u_2) = \emptyset$  і  $fr T_1(u_1) \cap fr T_2(u_2) \neq \emptyset$ ,
- $\varphi(u_1, u_1) < 0$ , якщо  $int T_1(u_1) \cap int T_2(u_2) \neq \emptyset$ .

У зв'язку з тим, що представляє інтерес саме розміщення робочих місць, тобто об'єктів прямокутної форми (столів), то наведемо приклад побудови  $\varphi$ -функції для двох прямокутників. Поставлена задача оптимального розміщення робочих місць зводиться до задачі математичного програмування. Цільова функція визначає критерій оптимальності – мінімізацію площі або периметра, зайнятого об'єктами. Обмеження на взаємне розташування робочих місць задаються за допомогою  $\varphi$ -функцій, і описують область пошуку рішень. Припустимо, прямокутники  $R_1(u_1)$  і  $R_2(u_2)$  задані довжиною  $2a_1$  і  $2a_2$  та шириною  $2b_1$  і  $2b_2$ , відповідно (рис. 1).

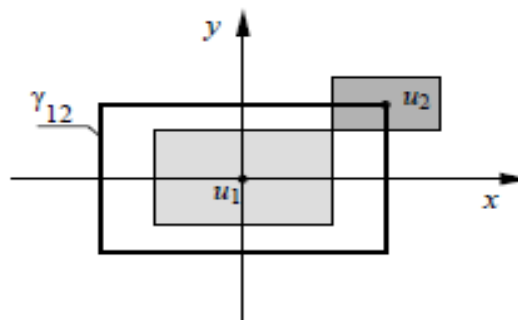


Рис. 1. Крива  $\gamma_{12}$  для прямокутників  $R_1(u_1)$  &  $R_2(u_2)$

Побудуємо криву  $\gamma_{12}$  – множину точок, в яких функції  $\varphi_{12}(u_1, u_2) = 0$ .  
 $\gamma_{12} = \text{fr} \{R_1(0) + (-1)R_2(0)\}$ . Розглянемо рівняння чотирьох прямих, які обмежують  $\gamma_{12}$ :

$$\chi_1(x, y) = x - A, \quad \chi_2(x, y) = y - B, \quad \chi_3(x, y) = -x - A, \quad \chi_4(x, y) = -y - B,$$

де  $A = a_1 + a_2, \quad B = b_1 + b_2$ .

Тоді маємо  $T_{12} = \{(x, y) \in R^2: \chi_i(x, y) \leq 0, i=1, \dots, 4\}$ , і отже,

$$\gamma_{12} = \left\{ (x, y) \in R^2 : \chi(x, y) = \max_{i=1, \dots, 4} \chi_i(x, y) = 0 \right\}.$$

Відповідна орієнтація  $\chi(x, y) = 0$  задається так, що  $\varphi$ -функція прямокутників прийме вигляд  $\varphi_{12}(u_1, u_2) = \chi(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ .

Слід зазначити також [2], що  $\varphi_{12}$  не є нормалізованою, оскільки значення  $\varphi_{12}(u_1, u_2)$  не дорівнюють відстаням між прямокутниками  $R_1(u_1)$  і  $R_2(u_2)$  в загальному випадку, а саме: в тих випадках, коли  $(dx, dy)$ , при  $dx = x_2 - x_1$  і  $dy = y_2 - y_1$ , задовольняють однієї з наступних систем

$$\begin{cases} \chi_1(dx, dy) > 0 \\ \chi_2(dx, dy) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_2(dx, dy) > 0 \\ \chi_3(dx, dy) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_3(dx, dy) > 0 \\ \chi_4(dx, dy) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_4(dx, dy) > 0 \\ \chi_1(dx, dy) > 0 \end{cases}$$

Для того, щоб побудувати нормалізовану  $\varphi$ -функцію двох прямокутників  $R_1(u_1)$  і  $R_2(u_2)$  необхідно ввести деякі додаткові функції вигляду

$$\tilde{\chi}_1(x, y) = x + y - s, \quad \tilde{\chi}_2(x, y) = -x + y - s, \quad \tilde{\chi}_3(x, y) = -x - y - s, \quad \tilde{\chi}_4(x, y) = x - y - s, \quad s = A + B,$$

$$\varphi_1(x, y) = \sqrt{(x - A)^2 + (y - B)^2}, \quad \varphi_2(x, y) = \sqrt{(x + A)^2 + (y - B)^2},$$

$$\varphi_3(x, y) = \sqrt{(x + A)^2 + (y + B)^2}, \quad \varphi_4(x, y) = \sqrt{(x - A)^2 + (y + B)^2}.$$

Тоді, маємо

$$\varphi_{12}(0, 0, x, y) = \omega(x, y) = \max \left\{ \max_{i=1, 2, 3, 4} \chi_i(x, y), \max_{i=1, 2, 3, 4} \min \{ \varphi_i(x, y), \chi_i(x, y) \} \right\}.$$

Нормалізована  $\varphi$ -функція прямокутників  $R_1(u_1)$  і  $R_2(u_2)$  прийме вигляд

$$\Phi_{12}(u_1, u_2) = \omega(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Вирішувати отриману систему лінійних рівнянь пропонується за допомогою симплекс-методу, що забезпечує швидкий час роботи для задач малої і середньої розмірності. Надалі рішення отриманої системи лінійних рівнянь дасть можливість правильно розмістити робочі місця на мінімальній площі з дотриманням всіх норм і правил.

Вище розглянутий найпростіший випадок розміщення робочих місць (наприклад, столів). Проте даний математичний апарат може бути застосовний до всіх найпростіших математичних об'єктів.

Розглянемо ситуацію, коли оптимізація розміщення необхідна для робочого місця і деякого устаткування. Припустимо, відомий деякий об'єкт  $R_1^*(u_1)$  і прямокутник  $R_2(u_2)$ , при цьому  $R_1^*$  характеризується  $2a_1$  і  $2b_1$ . Довжина  $2a_2$  і ширина  $2b_2$  прямокутника  $R_2$  такі, що  $a_1 \geq a_2$  і  $b_1 \geq b_2$ .

В цьому випадку,  $\gamma_{12} = \text{fr} T_{12} = \text{fr} \{R_1^*(0) + (-1)R_2(0)\}$ , де  $T_{12} = \text{cl}(R^2 \setminus \{(x, y) \in R^2: -A \leq x \leq A, -B \leq y \leq B\})$ ,  $A = a_1 - a_2, B = b_1 - b_2$ .

Вважаючи, що

$$\chi_1(x,y) = A-x, \chi_2(x,y) = B-y, \chi_3(x,y) = A+x, \chi_4(x,y) = B+y,$$

маємо

$$D_0 = \text{cl}(R^2 \setminus T_{12}) = \{(x, y) \in R^2: \chi_i(x, y) \geq 0, i = 1, \dots, 4\}$$

і, отже,

$$\gamma_{12} = \text{fr}D_0 = \text{fr}T_{12} = \{(x,y) \in R^2: \chi(x,y) = 0\},$$

де  $\chi(x,y) = \min\{\chi_1(x,y), \chi_2(x,y), \chi_3(x,y), \chi_4(x,y)\}$ .

Таким чином, нормалізована  $\phi$ -функція об'єкту  $R_1^*(u_1)$  і прямокутника  $R_2(u_2)$  прийме вигляд  $\phi_{12}(u_1, u_2) = \chi(x_2-x_1, y_2-y_1)$ .

**Результати дослідження.** Для того, щоб представити повний клас  $\phi$ -функцій, які необхідні для опису усіх взаємних положень двох базових об'єктів, має бути досліджена кожна пара таких об'єктів. Даний метод розширюється не тільки на прямокутники, а й на всі об'єкти елементарних геометричних форм.

Запропонований метод легко підлягає програмній реалізації, наприклад, за допомогою середовища Mathematica. За декілька секунд така програма може видати рішення у вигляді плану розміщення прямокутників, тобто робочих місць.

Таким чином, даний підхід дозволяє задавати будь-які обмеження на взаємне розташування об'єктів. Наприклад, згідно НПАОП 0.00-1.28-10 «Правила охорони праці при експлуатації ЕОМ» робочі місця з відеотерміналами і персональними ЕОМ розташовуються на відстані не менше 1 м від стін із світловими прорізами; відстань між бічними поверхнями відеотерміналів має бути не менше 1,2м; відстань між тильною поверхнею одного відеотерміналу та екраном іншого не повинна бути менше 2,5 м; прохід між рядами робочих місць має бути не менше 1 м. всі ці обмеження легко додаються до програми та вирішуються у найкоротший час.

Правильне розміщення і компоновка робочого місця, що відповідає вимогам ергономіки і інженерної психології [3], забезпечує оптимальний трудовий процес, зменшує стомлюваність робітників. Оптимальне розміщення робочих місць завжди сприятиме високій продуктивності праці і збереженню здоров'я працівників.

**Висновки.** Подальше вивчення і застосування даного математичного апарату може сприяти підвищенню ефективності планування виробництва, а так само проникненню сучасних методів теорії  $\phi$ -функцій в нову прикладну область.

Правильне розташування та компоновання робочого місця, забезпечення зручної пози й свободи трудових рухів, використання обладнання, що відповідає вимогам ергономіки та інженерної психології, забезпечують найбільш ефективний трудовий процес, зменшують стомлюваність і запобігають небезпеку виникнення професійних захворювань.

#### Список використаної літератури

1. Yu. Stoyan, J. Terno, G. Scheithauer, N. Gil and T. Romanova. Phi- function for primary 2D-objects, *Studia Informatica Universalis*, 2, 2001, 1-32.
2. Y. Stoyan, G. Scheithauer, N. Gil and T. Romanova,  $\phi$ -function for complex 2D-objects, *4OR: Quarterly J. Belgian, French and Italian Operations Research Soc.* 2 (2004), P.69-84.
3. Безпека праці: ергономічні та естетичні основи: Навчальний посібник / С . Апостолюк, В . С . Джигирей . А . В . Апостолюк та ін . - К .: Знання, 2006 . - 215 с .

Рекомендовано до публікації д.т.н., проф. Дзюндзюк Б.В., ХНУРЕ  
Стаття надійшла до редакції 20.02.2014

## ОРГАНИЗАЦИЯ ЭРГОНОМИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТРУДА СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ДЗЮНДЗЮК Б.В., ПРОНЮК А.В.

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники*

**Цель.** Решение экстремальных задач, что возникают при планировании производства, посредством математического аппарата исследования операций.

**Методика.** Для решения поставленной задачи использован метод построения  $\varphi$ -функций, которые можно охарактеризовать как меры близости объектов.

**Результаты.** Посредством аппарата теории  $\varphi$ -функций строится дерево решений, листьями которого являются независимые задачи линейного программирования. Целевая функция определяет критерий оптимума - минимизацию площади или периметра, занятого рабочими местами. Ограничения на взаимное расположение рабочих мест задаются с помощью  $\varphi$ -функций и описывают область поиска решений.

**Научная новизна та практическая значимость.** Математический аппарат  $\varphi$ -функций расширен на задачи эргономизации условий труда, полученные решения систем линейных уравнений дадут возможность оптимально разместить рабочие места на минимальной площади с соблюдением всех норм и правил. Эргономично организованное рабочее место не только создает нормальные условия труда работающих, но и способствует соблюдению технологической дисциплины, повышению качества продукции и снижению ее себестоимости.

**Ключевые слова:** *исследование операций,  $\varphi$ -функция, рабочие места, условия труда.*

## ORGANIZATION OF ERGONOMICS TERMS OF LABOUR BY FACILITIES OF THE MATHEMATICAL DESIGN

DZYUNDZYUK B.V., PRONYUK A.V.

*Kharkov national university of radio electronics*

**Purpose.** Decision of extreme tasks, that there are productions at planning, by means of mathematical apparatus of operations research.

**Methodology.** For the decision of the task the method of construction of  $\varphi$ -functions was used, which it is possible to describe like are the measures of closeness of objects.

**Findings.** By means of the  $\varphi$ -functions theory the decision tree are built, its leaves are the independent tasks of the linear programming. A purpose function determines the criterion of optimum - minimization of area or perimeter filled at workplaces. Limitations on the mutual location of workplaces are set with the help of  $\varphi$ -functions and the search area of decisions is described.

**Originality and practical value.** Mathematical apparatus of  $\varphi$ -functions is extended on the tasks of ergonomization terms of labor, the got decisions of the systems of the linear equalization will give possibility of optimum placing workplaces on a minimum area with the observance of all norms and rules. The ergonomics organized workplace not only creates the normal terms of labor of working, but also is instrumental in the observance of technological discipline, to upgrading products and decline of its prime price.

**Keywords:** *operations research,  $\varphi$ -function, workplaces, terms of labor.*