УДК 69.04 (075.8)

БАЛДУК П. Г., ДЕНИСЕНКО В. Ю., СУРЬЯНИНОВ Н. Г.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

К РАСЧЕТУ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Цель. *Решение задачи об устойчивости прямоугольной ортотропной пластины при любых вариантах граничных условий.*

Методика. *Преобразование дифференциального уравнения устойчивости ортотропной прямоугольной пластины из двумерного в одномерное путем применения вариационного метода Канторовича-Власова. Применение алгоритма численно-аналитического метода граничных элементов. Решение характеристического уравнения и анализ всех его корней.*

Результаты. *Получено дифференциальное уравнение устойчивости ортотропной прямоугольной пластины. Определена полная система его фундаментальных решений. Построено трансцендентное уравнение устойчивости, решение которого позволяет определять критические силы как статическим методом, так и динамическим. Из этого уравнения можно получить спектр критических сил при фиксированном числе полуволн в направлении одной оси и множественном числе полуволн в направлении второй оси.*

Научная новизна. *Получены 64 аналитических выражения фундаментальных функций и выражения функций Грина, соответствующие каждому варианту корней характеристического уравнения. Впервые приведено решение задачи об устойчивости прямоугольной ортотропной пластины при любых условиях закрепления ее кромок.*

Практическая значимость. *Полученные результаты позволяют аналитически построить полную систему фундаментальных функций рассматриваемой задачи. Предложенная методика позволяет получить решение задачи устойчивости прямоугольной ортотропной пластины при любых однородных и неоднородных граничных условиях.*

Ключевые слова: *устойчивость, ортотропная пластина, метод Канторовича-Власова, метод граничных элементов, фундаментальные функции.*

Введение. Во многих отраслях промышленности находят широкое применение конструкции в форме пластинок, изготовленные из ортотропных материалов, обладающие тремя плоскостями симметрии упругих свойств. При определенных условиях работа таких пластинок сопровождается появлением сжимающих напряжений в срединной плоскости, что может привести к потере устойчивости и несущей способности пластинки.

Определение критической нагрузки на пластинку представляет серьезные трудности математического характера не только для ортотропных, но и для изотропных пластин. В известных монографиях и справочниках приведено решение только задачи устойчивости прямоугольной пластины с шарнирным опиранием по контуру [1 – 6].

Анализ последних исследований и публикаций. Задача устойчивости изотропной прямоугольной пластины, нагруженной по двум противоположным краям усилиями, распределенными по линейному закону, впервые была решена И. Г. Бубновым [7] и С. П. Тимошенко [8]. Для ортотропной пластины эта задача решена С. Г. Лехницким [9]. Все эти классические решения получены для случая шарнирного закрепления краев пластины в форме двойных тригонометрических рядов.

Современных работ, посвященных устойчивости анизотропных пластин, крайне мало. Отметим статью [10], где решается задача устойчивости анизотропной пластинки (но опять-таки при шарнирном опирании по контуру) и работу [11], где решена задача устойчивости при чистом изгибе ортотропной пластины, у которой два противоположных края свободны, а два других края шарнирно закреплены. Здесь использовался метод конечных разностей.

Постановка задачи. Задачи подобного рода могут быть решены численными методами, такими как метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод R-функций и др., но полученные результаты желательно проверить каким-либо аналитическим методом. Представляется, что таковым является численно-аналитический метод граничных элементов (ЧА МГЭ). Как известно [12], основой этого метода является аналитическое построение фундаментальной системы решений и функций Грина для дифференциального уравнения (или их системы) для рассматриваемой задачи. Для учета определенных граничных условий, или условий контакта между отдельными элементами системы составляется небольшая система линейных алгебраических уравнений, которая затем решается численно. При этом не накладывается никаких ограничений ни на граничные условия, ни на характер внешней нагрузки. Отметим, что метод строго обоснован математически, т.к. использует фундаментальные решения дифференциальных уравнений, следовательно, с учетом изначально принятых гипотез позволяет получить точные значения искомых величин поставленной задачи.

Целью данной работы является решение задачи об устойчивости прямоугольной ортотропной пластины при любых вариантах граничных условий.

Результаты исследования. Рассматривая устойчивость ортотропной пластины в рамках гипотезы Кирхгофа-Лява (рис. 1), дифференциальное уравнение задачи можно записать в виде

$$\begin{aligned} &D_1\frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial y^4}+N_x(y)\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2}+\\ &+2N_{xy}\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x\partial y}+N_y(x)\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2}=q(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

где жесткости определяются формулами

$$D_1=\frac{E_x h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})};\quad D_2=\frac{E_y h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})};\quad D_3=D_1\mu_{xy}+2D_k=D_2\mu_{yx}+2D_k;\quad D_k=\frac{Gh^3}{12};$$

E_x, E_y — модули упругости в направлениях осей; G — модуль сдвига; h — толщина пластины; μ_{xy}, μ_{yx} — коэффициенты Пуассона; $W(x,y)$ — амплитудное значение прогиба; $N_x(y)$; N_{xy}; $N_y(x)$ — усилия в срединной плоскости; $q(x,y)$ — амплитудное значение поперечной нагрузки.

Уравнение устойчивости (1) имеет четвертый порядок и является дифференциальным уравнением в частных производных. Функция $W(x,y)$, являющаяся решением этого уравнения, зависит от двух переменных, т.е. имеет место двумерная задача. В то же время алгоритм ЧА МГЭ предполагает решение одномерной задачи. Переход от двумерной задачи к одномерной можно осуществить путем применения вариационного метода Канторовича-Власова.

Разложим прогиб $W(x, y)$ в функциональный ряд:

$$W(x, y) = W_1(y)X_1(x) + W_2(y)X_2(x) + \ldots + W_n(y)X_n(x). \quad (2)$$

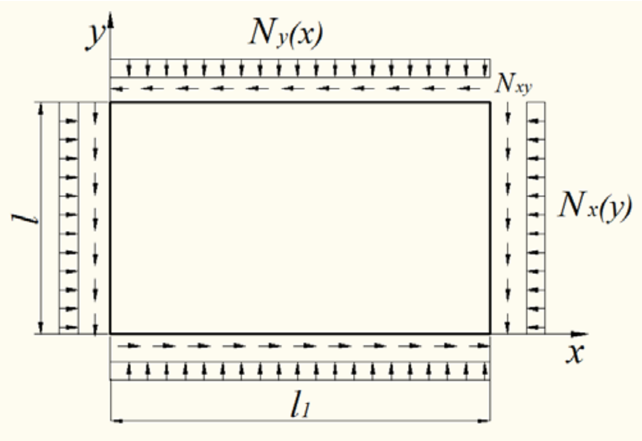

Рис. 1. **Пластина и приложенные нагрузки**

Безразмерную систему функций $X_i(x)$ необходимо выбрать такой, чтобы она максимально точно описывала форму изогнутой поверхности пластины в направлении оси ox. Этому требованию удовлетворяют кривые прогиба балки, имеющей такие же условия опирания, как и пластина в направлении оси ox. Для выбора функции поперечного распределения прогибов $X_i(x)$ известны два способа — *статический* и *динамический* [12]. При использовании статического способа прогиб балки определяется статической нагрузкой. Эта нагрузка должна быть такой, чтобы последовательно чередовались симметричные и кососимметричные формы кривой прогиба. Функции $X_i(x)$ представляются в виде степенных полиномов, которые легко дифференцировать, интегрировать и вычислять без применения сложных программ. При использовании динамического способа прогибы балки представляются формами ее собственных колебаний. В статическом способе необходимо строить функции $X_i(x)$ в зависимости от нагрузки и реакций балки. В динамическом способе достаточно менять только значения собственных частот, что весьма удобно.

Будем удерживать в (2) один член ряда, что оказывается вполне достаточным [12] для получения результата приемлемой точности, т.е.

$$W(x, y) = W(y)X(x). \quad (3)$$

Подставим (3) в (1):

$$D_1 X^{1V} W + 2D_3 X'' W'' + D_2 X W^{1V} + N_x(y) W X'' + 2N_{xy} W' X' + N_y(x) W'' X = q(x, y). \quad (4)$$

Умножим обе части (4) на X и проинтегрируем в пределах $[0; l_1]$, где l_1 — размер пластины в направлении оси x (рис. 1):

$$D_1 W \int_0^{l_1} X^{1V} X dx + 2D_3 W'' \int_0^{l_1} X'' X dx + D_2 W^{1V} \int_0^{l_1} X^2 dx +$$

$$+ N_x(y) \int_0^{l_1} X'' X dx + 2W' \int_0^{l_1} N_{xy} X' X dx + W'' \int_0^{l_1} N_y(x) X^2 dx = \int_0^{l_1} q(x, y) X dx.$$

Введем обозначения:

$$D_2\int_0^{l_1} X^2 dx = A;\ \int_0^{l_1}[2D_3X''+N_y(x)]Xdx = B;\ \int_0^{l_1} 2N_{xy}X'Xdx = K;\ \int_0^{l_1}[D_1X^{1V}+N_x(y)]Xdx = C,$$

тогда

$$AW^{1V}+BW''+KW'+CW = q(y), \tag{5}$$

где $q(y)=\int_0^{l_1} q(x,y)Xdx.$

Коэффициенты A, B, K, C могут быть вычислены в математических программах практически с любой точностью.

Из введенных обозначений следует, что $N_y(x)$ может быть любой функцией от x, в то время, как $N_x(y)$ и $N_y(x)$ должны быть кусочно-постоянными функциями от y, поскольку в противном случае уравнение (5) будет дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами.

Разделим все члены уравнения (5) на A:

$$W^{1V}+2r^2W''+f^3W'+s^4W=\frac{1}{A}q(y), \tag{6}$$

где

$$r^2=\frac{B}{2A};\quad f^3=\frac{K}{A};\quad s^4=\frac{C}{A}.$$

Уравнение (6) с начальными условиями $W(0), \theta(0), M(0), Q(0)$ образует задачу Коши:

$$\begin{bmatrix} W(y) \\ \theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \int_0^y \begin{bmatrix} A_{14}(y-\xi) \\ A_{13}(y-\xi) \\ -A_{12}(y-\xi) \\ -A_{11}(y-\xi) \end{bmatrix} q(\xi)d\xi.$$

Решение задачи Коши позволит определить фундаментальные функции, вид которых зависит от корней характеристического уравнения

$$t^4+2r^2t^2+f^3t+s^4=0. \tag{7}$$

Рассмотрим практически важный случай, когда $N_{xy}=0$. При этом в уравнении (7) будет $f=0$, и корни характеристического уравнения вычисляются по формулам

$$t_{1-4}=\pm\sqrt{r^2\pm\sqrt{r^4-s^4}}.$$

Вид фундаментальных функций определяется соотношением между r и s, которое зависит от условий закрепления продольных кромок ортотропной пластины. Для этого соотношения возможны четыре варианта:

1. $|s|>|r|$ — комплексные корни: $t_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta$,

где $\alpha=\sqrt{\dfrac{s^2-r^2}{2}}$; $\beta=\sqrt{\dfrac{s^2+r^2}{2}}$.

2. $s^4<0, r^2\neq 0$ — корни действительные и мнимые: $t_{1-2}=\pm\alpha; t_{3-4}=\pm i\beta$.

3. $s^4 > 0, |s| < |r|, r^2 > 0$ — корни мнимые: $t_{1-2} = \pm i\alpha; t_{3-4} = \pm i\beta$.

4. $s^4 > 0, r^4 - s^4 > 0, r^2 < 0$ — корни действительные и различные: $t_{1-2} = \pm\alpha; t_{3-4} = \pm\beta$.

После определения фундаментальных функций можно составить трансцендентное уравнение устойчивости ортотропной пластины, которое в общем случае будет иметь вид

$$\left| A_*(N_x, N_y, N_{xy}) = 0 \right|, \tag{8}$$

где A_* — квадратная матрица значений фундаментальных ортонормированных функций с компенсирующими элементами, описывающими топологию системы.

Корни уравнения (8) образуют спектр критических сил рассматриваемой пластинки.

Выводы. Таким образом, задача об устойчивости ортотропной прямоугольной пластины приводит к четырем комбинациям корней характеристического уравнения задачи, а, значит, полное решение задачи будет определяться 64 аналитическими выражениями фундаментальных функций.

Следует отметить, что матрица A_* является сильно разреженной, ее система фундаментальных ортонормированных функций хорошую устойчивость численного процесса решения краевой задачи, а в определителе нет точек разрыва 2-го рода.

Полученное трансцендентное уравнение (8) позволяет определять критические силы как статическим методом, так и динамическим. Из этого уравнения можно получить спектр критических сил при фиксированном числе полуволн в направлении оси ox (рис. 1). Например, одна полуволна в направлении оси ox и множество полуволн в направлении оси oy, две полуволны в направлении оси ox и множество полуволн в направлении оси oy и т.д., в зависимости от величины коэффициентов A, B, K, C.

Использованный подход позволяет получить решение задачи устойчивости ортотропной пластины при любых однородных и неоднородных граничных условиях.

Литература

1. Вайнберг Д. В. Пластины, балки-стенки. (Прочность, устойчивость и колебания) / Д. В. Вайнберг, Е. Д. Вайнберг — Киев: Госстройиздат УССР, 1959. — 1049 с.
2. Справочник по строительной механике корабля; В 3-х т. / Под ред. Акад. Ю. А. Шиманского. — Л.: Судпромгиз, 1958. — Т. 1-3.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир — М.: Наука, 1967. — 984 с.
4. Справочник по строительной механике корабля; В 3-х т. / Под ред. проф. О. М. Палия. — Л.: Судостроение, 1982. — Т. 1-3.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем / С. П. Тимошенко — М.: Гостехиздат, 1955. — 568 с.
6. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко — М.: Наука, 1971. — 808с.
7. Bubnov, I. G. Theory of Structures of Ships. Vol. 1

References

1. Vajnberg D. V. Plastiny, balki-stenki. (Prochnost', ustojchivost' i kolebaniya) / D. V. Vajnberg, E. D. Vajnberg — Kiev: Gosstrojizdat USSR, 1959. — 1049 p.
2. Spravochnik po stroitel'noj mekhanike korablya; V 3-h t. / Pod red. Akad. YU. A. SHimanskogo. — L.: Sudpromgiz, 1958. — T. 1-3.
3. Vol'mir A.S. Ustojchivost' deformiruemyh sistem / A.S. Vol'mir — M.: Nauka, 1967. — 984 p.
4. Spravochnik po stroitel'noj mekhanike korablya; V 3-h t. / Pod red. prof. O. M. Paliya. — L.: Sudostroenie, 1982. — T. 1-3.
5. Timoshenko S. P. Ustojchivost' uprugih sistem / S. P. Timoshenko — M.: Gostekhizdat, 1955. — 568 s.
6. Timoshenko S. P. Ustojchivost' sterzhnej, plastin i obolochek / S. P. Timoshenko — M.: Nauka, 1971. — 808 p.
7. Bubnov, I. G. Theory of Structures of Ships. Vol. 1 and 2 / I. G. Bubnov. St. Petersburg, 1912, 1914.

and 2 / I. G. Bubnov. St. Petersburg, 1912, 1914.
8. Timoshenko, S. P. Theory of Elastic Stability / S. P. Timoshenko, J. M. Gere. 2nd ed. N. Y.: McGraw-Hill, 1961.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий — М.: Наука, 1977. — 416 с.
10. Колмогоров Г.Л. Вопросы устойчивости анизотропных пластин / Г.Л. Колмогоров, Е.О. Зиброва — М.: Прикладная математика и вопросы управления, 2015. — № 4. — С.35-42.
11. Лопатин А. В. Устойчивость ортотропной пластины с двумя свободными краями, нагруженной изгибающим моментом в плоскости / А. В. Лопатин, Р. В. Авакумов — Новосибирск, Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева, 2009. — с.28-33.
12. Дащенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса: ВМВ, 2010. — В 2–х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
8. Timoshenko, S. P. Theory of Elastic Stability / S. P. Timoshenko, J. M. Gere. 2nd ed. N. Y.: McGraw-Hill, 1961.
9. Lekhnickij S. G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela / S. G. Lekhnickij — M.: Nauka, 1977. — 416 p.
10. Kolmogorov G.L. Voprosy ustojchivosti anizotropnyh plastin / G.L. Kolmogorov, E.O. Zibrova — M.: Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya, 2015. — № 4. — p. 35-42.
11. Lopatin A. V. Ustojchivost' ortotropnoj plastiny s dvumya svobodnymi krayami, nagruzhennoj izgibayushchim momentom v ploskosti / A. V. Lopatin, R. V. Avakumov — Novosibirsk, Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aehrokosmicheskogo universiteta imeni akademika M. F. Reshetneva, 2009. — p.28-33.
12. Dashchenko A.F. CHislenno-analiticheskij metod granichnyh ehlementov / A.F. Dashchenko, L.V. Kolomiec, V.F. Orobej, N.G. Sur'yaninov — Odessa: VMV, 2010. — V 2–h tomah. — T.1. — 416 p. — T.2. — 512 p.

ДО РОЗРАХУНКУ СТІЙКОСТІ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

БАЛДУК П. Г., ДЕНИСЕНКО В. Ю., СУР'ЯНІНОВ М. Г.
Одеська державна академія будівництва та архітектури

Мета. *Розв'язок завдання про стійкість прямокутної ортотропної пластини при будь-яких варіантах граничних умов.*

Методика. *Перетворення диференціального рівняння стійкості ортотропної прямокутної пластини із двовимірного в одномірне шляхом застосування варіаційного методу Канторовича-Власова. Застосування алгоритму чисельно-аналітичного методу граничних елементів. Розв'язок характеристичного рівняння та аналіз усіх його коренів.*

Результати. *Отримане диференціальне рівняння стійкості ортотропної прямокутної пластини. Визначена повна система його фундаментальних розв'язків. Побудоване трансцендентне рівняння стійкості, розв'язок якого дозволяє визначати критичні сили як статичним методом, так і динамічним. Із цього рівняння можна одержати спектр критичних сил при фіксованім числі півхвиль у напрямку однієї осі й множині півхвиль у напрямку другої осі.*

Наукова новизна. *Отримано 64 аналітичних вираження фундаментальних функцій і вираження функцій Гріна, відповідні до кожного варіанта коренів характеристичного рівняння. Вперше наведений розв'язок завдання про стійкість прямокутної ортотропної пластини при будь-яких умовах закріплення її крайок.*

Практична значимість. *Отримані результати дозволяють аналітично побудувати повну систему фундаментальних функцій розглянутого завдання. Запропонована методика дозволяє одержати розв'язок завдання стійкості прямокутної ортотропної пластини при будь-яких однорідних і неоднорідних граничних умовах.*

Ключові слова: *стійкість, ортотропна пластина, метод Канторовича-Власова, метод граничних елементів, фундаментальні функції.*

TO THE CALCULATION OF THE STABILITY OF ORTHOTROPIC PLATES BY THE NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD OF BORDER ELEMENTS

BALDUK P. G., DENISENKO V. Y., SURYANINOV N. G.
Odessa State Academy of Construction and Architecture

Goal. *The solution of the problem of the stability of a rectangular orthotropic plate under any variants of the boundary conditions.*

Methodology. *Transformation of the differential equation of stability of an orthotropic rectangular plate from two-dimensional to one-dimensional by applying the variational method of Kantorovich-Vlasov. Application of the algorithm of the numerical-analytic method of boundary elements. Solution of the characteristic equation and analysis of all its roots.*

Results. *A differential equation for the stability of an orthotropic rectangular plate is obtained. A complete system of its fundamental solutions is defined. A transcendental equation of stability is constructed, the solution of which makes it possible to determine the critical forces both by the static method and by the dynamic method. From this equation, one can obtain a spectrum of critical forces for a fixed number of half-waves in the direction of one axis and a plural number of half-waves in the direction of the second axis.*

Scientific novelty. *64 analytic expressions of fundamental functions and expressions for Green's functions corresponding to each variant of the roots of the characteristic equation are obtained. The problem of the stability of a rectangular orthotropic plate for the first time is given for the first time under any conditions for fixing its edges.*

Practical significance. *The results obtained make it possible analytically to construct a complete system of fundamental functions of the problem under consideration. The proposed technique makes it possible to obtain a solution to the problem of stability of a rectangular orthotropic plate under any homogeneous and inhomogeneous boundary conditions.*

Keywords: *stability, orthotropic plate, Kantorovich-Vlasov method, boundary element method, fundamental functions.*