## Підсекція «Вища математика»

УДК 517.2

# ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ЗАДАЧ АВТОМАТИЗОВАНОГО УПРАВЛІННЯ

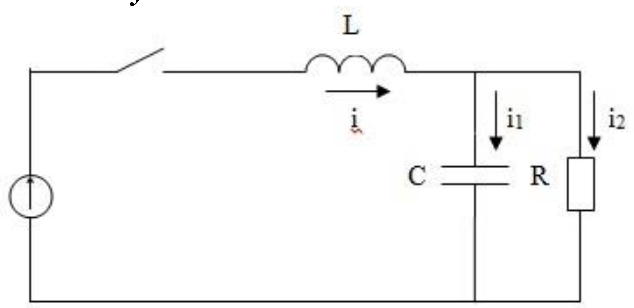
Студ. В.В.Олійник, гр. БА1-16
Студ. Ю.Г.Рогинський, гр. БА1-16
Науковий керівник доц. І.М. Зелепугіна
Київський національний університет технологій та дизайну

***Мета:*** Розкрити особливості використання математичних методів та моделей до розв'язання задач автоматизованого управління.

***Завдання:*** Математичні моделі багатьох систем автоматичного управління являють собою системи інтегро-диференціальних рівнянь. Особливо це стосується моделей, пов'язаних з перехідними процесами в електричних ланцюгах. Показати можливість використання засобів операційного числення саме для таких задач автоматизованого управління.

***Об'єкт:*** Система, що являє собою електричний RLC ланцюг, підключається до джерела з постійною електрорушійною силою. Необхідно знайти силу струму як функцію часу шляхом побудови відповідної математичної моделі та її використання. ***Методи:*** складання систем інтегро-диференціальних рівнянь, операційне числення. ***Наукова новизна та практичне значення отриманих результатів:*** Розширено застосування математичних методів до певних задач автоматизованого управління

***Результати:***




Електрична схема системи наведена на малюнку зліва. Ланцюг підключено до джерела струму з постійною електрорушійною силою (ЕРС), що дорівнює E, при цьому, до моменту включення, струм та заряд в ланцюгу були відсутніми.

Математична модель цієї системи являє собою систему інтегро-диференціальних рівнянь Кірхгофа.

$$\begin{cases} Li'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t\big(i(\tau) - i_1(\tau)\big)d\tau = E \\ Ri_1(t) - \frac{1}{C}\int_0^t\big(i(\tau) - i_1(\tau)\big)d\tau = 0 \end{cases} \quad (1),$$

при цьому $i(t) - i_1(t) = i_2(t)$. Початкові умови $i(0) = i_1(0) = 0$.

Система (1) лінійна. Спробуємо застосувати до неї перетворення Лапласа, щоб звести задачу до вирішення алгебраїчних рівнянь.

Перетворенням Лапласа функції дійсної змінної f(t) називається функція комплексної змінної $F(p)$ така, що:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt,$$

при цьому функція $F$ називається зображенням функції $f$, і, навпаки, функція $f$ називається оригіналом функції $F$. Позначається така відповідність f→F.

Методика застосування перетворення Лапласа до вирішення інтегро-диференціальних рівнянь полягає в заміні таких рівнянь (щодо оригіналів) відповідними алгебраїчними рівняннями (щодо зображень) з урахуванням початкових умов, вирішення отриманих рівнянь (щодо зображень) та знаходження по знайденим зображенням шуканих оригіналів.

Застосуємо таку методику до вирішення системи (1). При цьому позначимо $i(t) \rightarrow I(p)$, $i_1(t) \rightarrow I_1(p)$, диференціюванню в вихідний системі відповідає множення на $p$ в утвореній, а інтегралу – ділення на $p$. Отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} LpI(p) + \frac{1}{Cp}\big(I(p) - I_1(p)\big) = \frac{E}{p} \\ RI_1(p) - \frac{1}{Cp}\big(I(p) - I_1(p)\big) = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \left(Lp + \frac{1}{Cp}\right)I(p) - \frac{1}{Cp}I_1(p) = \frac{E}{p} \\ \frac{1}{Cp}I(p) - \left(R + \frac{1}{Cp}\right)I_1(p) = 0 \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему відносно $I$ та $I_1$, матимемо:

$$I_1(p) = \frac{E}{RLC} \cdot \frac{1}{p\left(p^2 + \frac{1}{CR}p + \frac{1}{LC}\right)},$$

$$I(p) = \frac{E}{RLC}(CR\frac{1}{p^2 + \frac{1}{CR}p + \frac{1}{LC}} + \frac{1}{p\left(p^2 + \frac{1}{CR}p + \frac{1}{LC}\right)})$$

Якщо $\frac{1}{LC} - \frac{1}{4C^2R^2} > 0,$ то, позначаючи цей вираз $\omega_1^2$ та переходячи до оригіналів, отримаємо:

$$i_1(t) = \frac{EL}{R}(1 - e^{-t/_{2RC}}\left(cos\omega_1 t + \frac{1}{2CR\omega_1}sin\omega_1 t\right))$$

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/_{2RC}}\left(cos\omega_1 t + \frac{1}{\omega_1}(\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L})sin\omega_1 t\right))$$

Силу струму $i_2(t)$ можна знайти як різницю $i(t) - i_1(t)$.

Якщо $\frac{1}{LC} - \frac{1}{4C^2R^2} < 0$, то позначаючи $\beta^2 = \frac{1}{4C^2R^2} - \frac{1}{LC}$ та переходячи до оригіналів, отримаємо:

$$i_1(t) = \frac{EL}{R}(1 - e^{-t/_{2RC}}\left(ch\beta t + \frac{1}{2CR\beta}sh\beta t\right))$$

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/_{2RC}}\left(sh\beta t + \frac{1}{\beta}(\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L})ch\beta t\right))$$

***Висновки:*** створена математична модель однієї задачі автоматизованого управління та знайдено її розв'язок, отже методи операційного числення раціональні та ефективні для використання в задачах автоматизованого управління, пов'язаних з перехідними процесами в електричних ланцюгах.

***Ключові слова:*** система інтегро-диференціальних рівнянь, операторні рівняння, операційне числення.