

УДК 624.04:624.031.

КОБРИНЕЦ В.М., БЕКИРОВА М.М., КАЛИНИНА Т.А.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ИДЕАЛЬНЫХ И РЕАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Цель. Обоснование похода к решению проблемы устойчивости центрально сжатых идеальных стержней.

Методика. Определение несущей способности сжатого идеального стержня выполняется по возмущенному состоянию с использованием продольно-изгибной жесткости.

Результаты. Получены расчетные формулы, определяющие несущую способность идеальных и реальных стержней. Перемещения при продольном изгибе определены через интеграл Мора. Получены формулы критических сил при силовом и кинематическом возмущении.

Научная новизна. Впервые критическая сила идеального и реального стержня определена как несущая способность. При этом несущая способность определена разными способами. Показано, что факторами, определяющими условия потери устойчивости, являются возмущенное состояние и внешняя сила.

Практическая значимость. Методика, построенная на выполненных в работе теоретических и численных исследованиях, позволяет оказывать влияние на величину критической силы. Дополнительно построена методика определения перемещений при продольно-поперечном изгибе на основе интеграла Мора.

Ключевые слова: идеальный стержень, устойчивость, податливость, жесткость, несущая способность.

Введение. Проблему устойчивости центрально сжатых стержней Леонард Эйлер рассмотрел в 1744 году [1] на примере шарнирно-опертой стойки. При этом сила P и реакция действуют по оси стойки, и все сечения равномерно сжаты. Эйлер записал дифференциальное уравнение краевой задачи для идеальной стойки – это постановка Эйлера. Но идеальные стойки устойчивости не теряют. Эйлер это понимал, но тогда не был сформулирован критерий начальных несовершенств. Эйлер предложил рассмотреть возмущенное состояние. Но прежде чем рассмотреть возмущенное состояние, его нужно создать. Эйлер не заострял внимание на возмущенном состоянии. Он показал изогнутое состояние стойки, через которое можно записать продольный момент $M_p = P \cdot y(x)$, и подставить его в дифференциальное уравнение. Через возмущенное состояние Эйлер решил краевую задачу и определил $P_{кр}$. При этом отметил, что криволинейная форма более устойчива, чем прямолинейная.

Постановка задачи. Здесь возникают два вопроса – почему стержни теряют устойчивость, и почему они становятся менее устойчивы? Потеря устойчивости связана с появлением возмущений, поскольку у стержней есть несовершенства. А уменьшение устойчивости прямолинейной формы обусловлено отсутствием изгибной жесткости. Следует напомнить, что для шарнирно-опертой прямолинейной балки с силой по середине:

$$f = \frac{Pl^3}{48EI} \quad (1)$$

Если $P = 1$, тогда податливость $\delta = \frac{l^3}{48EI}$, а величина, обратная δ , будет изгибной поперечной жесткостью $r = \frac{48EI}{l^3}$. При этом в балке формируется упругая сила:

$$F_y = r \cdot f = P \quad (2)$$

В зависимости от силы P , прогиб может принимать значения от 0 до $[f]$, т.е. имеет множество промежуточных значений.

Результаты исследования. Теперь покажем, как определить податливость δ и изгибно-продольную жесткость r на устойчивость шарнирно-опертой стойки (рис.1, а). Возмущенное состояние принимаем по первой характеристической кривой:

$$y_0(x) = a_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3)$$

Выгиб при продольном изгибе А.С. Вольмир [2] записал, пользуясь формулой Максвелла-Мора, но вычислял иначе. Мы запишем с помощью (3) (рис.1, а)

$$f = \int_0^l \frac{M_p \overline{M}}{EI} dx, \quad M_p = Pa_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \overline{M} = \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$f = \frac{Pa_0}{EI} 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x}{2} \sin \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{l^2}{\pi^2 EI} \cos \frac{\pi x}{l} \Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{Pa_0 l^2}{\pi^2 EI}$$

При $P = 1$ $\delta = \frac{a_0 l^2}{\pi^2 EI}$, $r = \frac{\pi^2 EI}{a_0 l^2}$. Если умножить r на $y(x) = a_0$, то получим внутреннюю упругую восстанавливающую силу F_y или несущую способность:

$$F_y = N_{i.c} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (5)$$

Здесь δ и r отличаются от δ и r при поперечном изгибе, но не имеют ту же размерность.

Когда $a_0 = 1$, стрелой выгиба будет $f = \frac{l^2}{\pi^2 EI}$.

Сила упругости F_y и изгибно-продольная жесткость, которая ее формирует, – это *отпорность* [4], которая удерживает колонну после потери устойчивости в возмущенном (изогнутом) состоянии и несет продольную силу $P_{кр}$.

Здесь одна сила и один выгиб, соответствующий этой силе, в отличие от поперечного изгиба. Поэтому рассматривать нормативный или допускаемый выгиб здесь не обязательно, да и не имеет смысла.

Если к стойке, стержню, колонне приложить силу:

$$F_y = N_{i.c} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (6)$$

произойдет полное исчерпание несущей способности, а это предельное состояние, которое неминуемо приведет к потере устойчивости по возмущенной форме. Именно такую силу и определил Эйлер и назвал ее критической, но лучше назвать ее предельной, хотя через 272 года менять ее название не стоит.

Здесь уместно привести несущую способность по прогибу при поперечном изгибе. Для шарнирно опертой балки, с силой посередине пролета, прогиб запишем через податливость и нормативный относительный прогиб $[f]$:

$$f = \frac{Pl^3}{48EI} \leq [f],$$

отсюда получим $P_{i.\bar{n}} = \frac{48EI}{l^3}$.

Для балок $[f] = \frac{l}{n_0}$, $n_0 = 250, 400, 500, 600$, тогда

$$P_{i.\bar{n}} = \frac{48EI}{n_0 l^2} \tag{7}$$

Это несущая способность второго предельного состояния.

Запишем прогиб для идеальной стойки через податливость и нормативный относительный прогиб $[f] = \frac{l}{n_0} = \frac{l}{300}$.

$$f = \frac{P \cdot a_0 l^3}{9,8696EI} \leq [f], \text{ отсюда } P_{i.\bar{n}} = \frac{\pi^2 \cdot EI [f]}{a_0 l^2}$$

Если $[f] = a_0$

$$P_{i.\bar{n}} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2} = P_{\bar{e}\delta} \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) идентичны, а это означает, что несущая способность при поперечном и продольном изгибе формируется по одним и тем же правилам.

Эйлер рассмотрел возмущенное состояние стойки без обозначения стрелы выгиба a_0 . Поэтому при решении дифференциального уравнения изогнутой оси стойки, он произвольную постоянную $C_2 = 0$ нашел, но C_1 не нашел, (она равна $C_1 = a_0$), хотя Эйлер и без этого получил условие для определения $D_{\bar{e}\delta} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, которым уже пользуемся 272 года.

Эксплуатационные силы $D_{y\bar{e}\bar{n}}$ и $D_{\bar{e}\delta}$ связаны с условием $P_{y\bar{e}\bar{n}} = n_y D_{\bar{e}\delta}$, где n_y – коэффициент запаса.

Эйлеровые нагрузки, как их назвал С.П. Тимошенко, это скорее триумф математики, а не реальное поведение строительных стоек или колонн.

Пановко Я.Г.[1], рассматривает устойчивость консольной стойки. При этом отмечается, что нужно исходить из заранее отклоненной конфигурации стойки. А это и есть возмущенное состояние, которое вместе с силой определяет процесс потери устойчивости.

При действии силы P (рис.1, а) произойдет вертикальное смещение u_A верхнего конца стержня (рис.1, в). Уберем силу P и поставим опорный стержень C (рис.1, в), но при этом продольная сила $N = P$ остается, а в стержне C появится реакция R_C . Изогнутая ось описывается уравнением:

$$y(x) = f \cdot \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (9)$$

Здесь уместно напомнить известный факт. Если достаточно тонкий стержень согнуть в дугу и концы связать тетивой, а силы убрать, тогда в тетиве появится растягивающая сила равная $P_{кр}$ по Эйлеру [5]. То есть, внешних сил нет, а упругие силы есть, и они растягивают тетиву.

В стержне на рис. 1, в ситуация та же. При малых искривлениях Δl определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l (y'(x))^2 dx, \quad (10)$$

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l f_0^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = f^2 \frac{\pi^2}{2l}. \quad (11)$$

Работа

$$A = P \cdot \Delta l = Pf^2 \frac{\pi^2}{2l}. \quad (12)$$

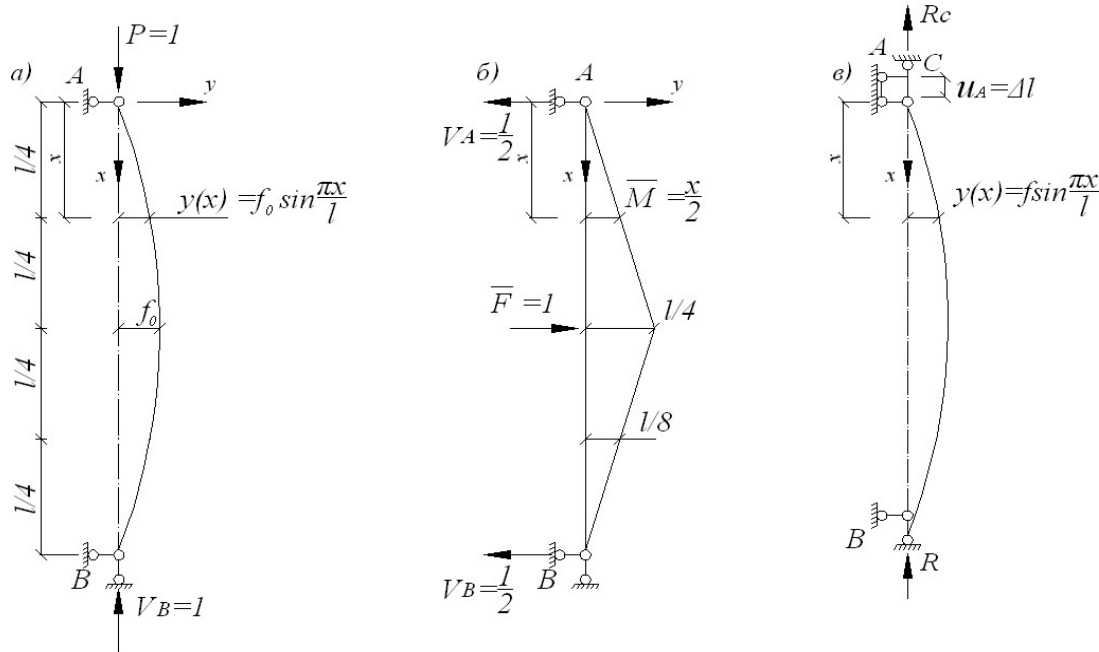


Рис. 1. Устойчивость с возмущением

а) грузовая эпюра; б) единичная эпюра; в) смещение узла A вниз и постановка стержня C

Энергия изгиба

$$W = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \quad (13)$$

$$W = P^2 f_0^2 \int_0^l \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{l}}{2EI} dx = \frac{P^2 f^2 l}{2EI}$$

Приравнявая (12) и (13), получим

$P_{кр}$ по (14) - это формула С.П. Тимошенко [2].

$$P f^2 \frac{\pi^2}{2l} = P^2 f_0^2 \frac{l}{2EI}, \quad P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = N. \quad (14)$$

Если силу $P_{кр}$ приложить к стойке, затем убрать и поставить стержень C , получим своеобразный лук. Криволинейная колонна аккумулирует упругую энергию и приобретает способность, как арка, давить на опоры, но при отсутствии внешних сил, за счет несущей способности, определяемой по (14). При этом $R_c = N_{н.с} = N$.

Итак, есть F_{max} и $P_{кр}$ -Эйлера, есть N_c и $P_{н.с.}$ -Эйлера, но $F_{max} = N_c = P_{кр} = P_{н.с.}$, так как одно есть отображение другого.

При поперечном изгибе можно прикладывать разные силы и получить много прогибов от маленького до большого. При потере устойчивости нельзя приложить маленькую силу, чтобы колонна «немножко» потеряла устойчивость. Сила должна вобрать всю несущую способность, и только тогда неустойчивая форма сменится на другую устойчивую равновесную, а для первой формы это будет предельное состояние.

Выясним, как возмущенное состояние влияет на величину критической силы. Рассмотрим прямолинейную центрально сжатую идеальную стойку (рис.2, а). Силу P убираем и прикладываем горизонтальную силу $F = 1$ и строим эпюру \bar{M} (рис.2,б). Уже есть возмущение-прогиб (рис.2, в).

$$\delta = \frac{l^3}{48EI} \quad (15)$$

и жесткость

$$r = \frac{48EI}{l^3} \quad (16)$$

Теперь прикладываем продольную силу P , а горизонтальную силу F убираем, но при этом жесткость r остается. Если сила P не достигла определенной величины, тогда стойка вернется в исходное положение. При определенной величине силы P жесткость (теперь это отпорность) удержит стойку в изогнутом состоянии, и будет нести силу P .

Сила P на выгибе δ создает продольный момент $M = P\delta$, который равен балочному

$M_{бал} = \frac{l}{4}$, отсюда определяем критическую продольную силу:

$$P_{кр} = \frac{12EI}{l^2}. \quad (17)$$

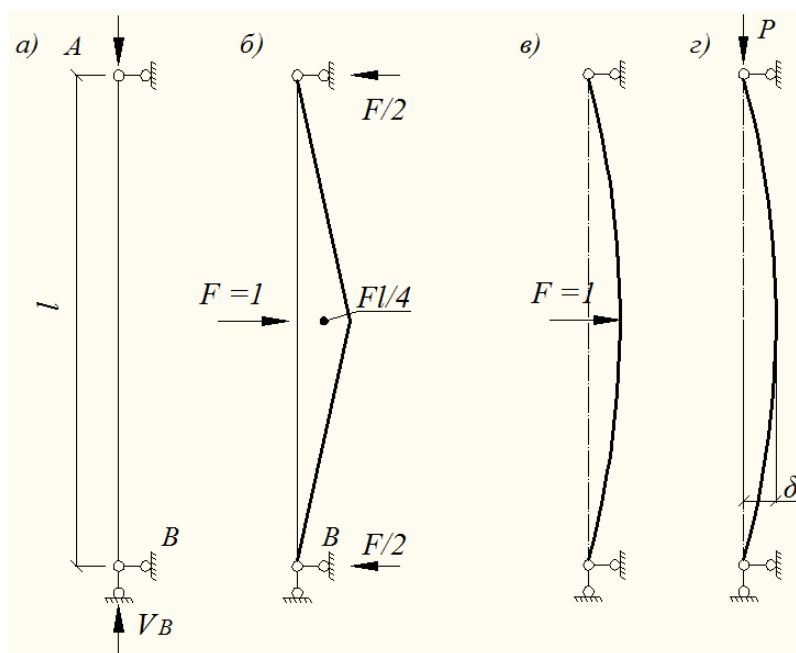


Рис. 2. Влияние возмущенного состояния на величину критической силы
 а) центрально сжатый стержень устойчивости не теряет; б) загрузка горизонтальной силой F ; в) создание возмущенного состояния; г) потеря устойчивости

Сила $P_{кр}$ по (17) оказалась больше Эйлеровой, потому что поперечно-изгибная жесткость больше изгибно-продольной.

Определим балочную податливость не от единичной силы, а от силы $F = 0,822467$. Можно убедиться, что в этом случае сила $P_{кр}$ будет равна Эйлеровой.

$$P_{\epsilon\delta} = \frac{F \cdot 48EI}{4l^3} = \frac{12 \cdot 0,822467EI}{l^2} = \frac{9,8696EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (18)$$

Для консольной балки $r = \frac{3Ei}{l^3}$.

$$P_{\epsilon\delta} = \frac{3EI \cdot 0,822467l}{l^3} = \frac{2,4674EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}, \quad (19)$$

и здесь возмущенное состояние будет силовым, т.е. от силы $F = 0,822467$ (рис. 2, в).

Рассмотрим кинематическое возмущенное состояние (рис. 3). Связь C смещаем вправо на 1. Максимальный момент на эпюре M (рис. 3, в) при поперечном изгибе составляет $M = \frac{12EI}{l^2}$. При продольном изгибе $M_{прод} = P \cdot \delta$, здесь $\delta = 1$. При поперечном изгибе δ

берем меньше единицы – $\delta = 0,822467$, тогда $M_{i\delta i} = \frac{9,8696EI}{l^2}$.

$$P = \frac{9,8696EI}{l^2}. \quad (20)$$

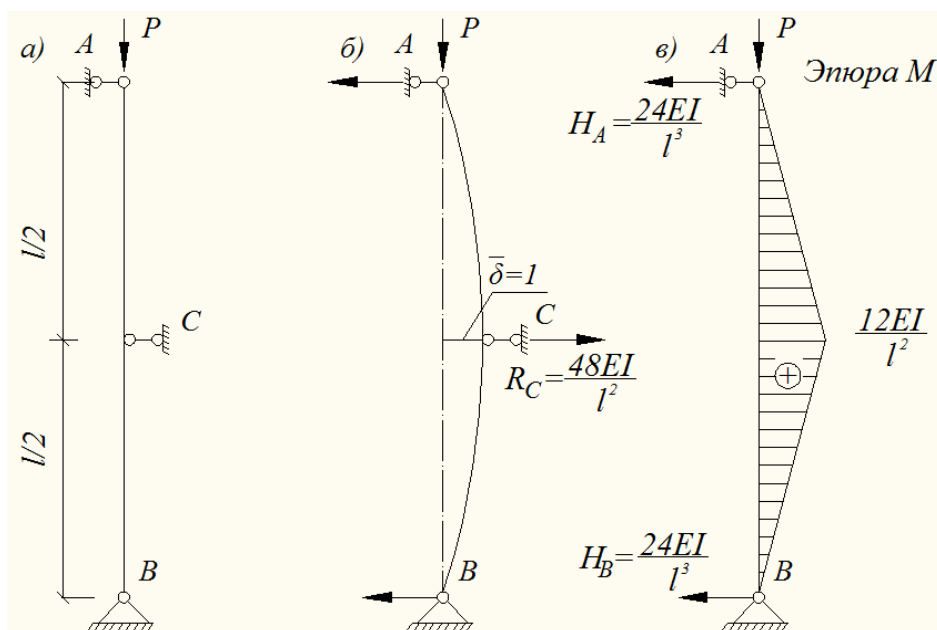


Рис. 3. Кинематическое возмущенное состояние: а) схема стойки с дополнительной связью С; б) возмущенное состояние; в) эпюра моментов

По (19) определяется критическая сила для стержня (рис. 3, а), если С убрать в возмущенном состоянии. А.С. Вольмир [3] рассмотрел влияние формы упругой линии на $P_{кр}$ (рис. 4).

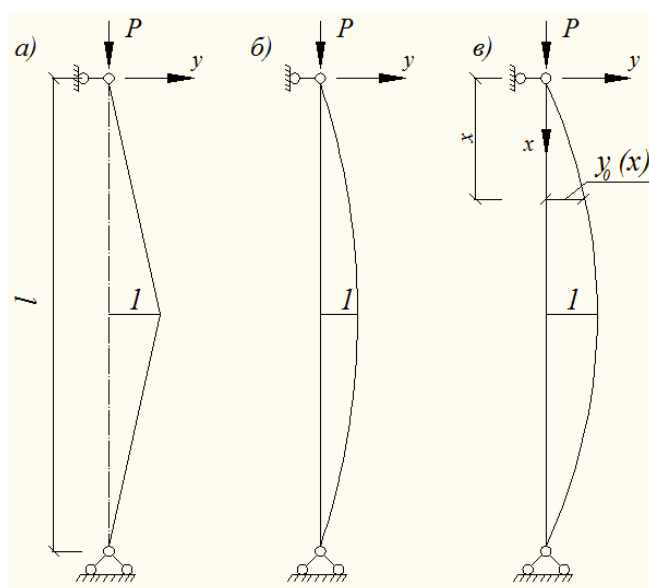


Рис. 3. Формы упругой линии: а) ломаная линия; б) парабола; в) синусоида

Критические силы

$$P_{кр.а} = \frac{12EI}{l^2}, \quad P_{кр.б} = \frac{10EI}{l^2}, \quad P_{кр.в} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (21)$$

А.С. Вольмир назвал так: $P_{кр.а}$ – нулевым приближением, $P_{кр.б}$ – вторым, $P_{кр.в}$ – точное значение. Однако, формулы (21) – это не уточнение, а влияние формы упругой линии. Формулы (18) - (21) скорее говорят о возможности регулирования $P_{кр}$.

Приведем таблицу значений $P_{кр} = \frac{12FEI}{l^2}$ в зависимости от F (табл.1)

Таблица 1

Критические силы в зависимости от F

F	0,5	0,8224	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$P_{кр} \frac{l^2}{EI} =$	6	9,87	12	13,2	14,4	15,6	16,8	18	19,2	20,4	21,6	22,8	24

А.С. Вольмир считает, что $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ – точное решение, а остальные – это приближения. Но если возмущения удовлетворяют граничным условиям, тогда $P_{кр}$ по (20) и в табл. 1 можно считать способом влияния или регулирования $P_{кр}$.

Результаты в табл. 1 получены для идеальной стойки. Здесь процесс потери устойчивости начинается с возмущения и заканчивается им. Потеря устойчивости происходит при наличии двух факторов – возмущения и силы. Как Леонард Эйлер решал вопрос с возмущением? Он понимал так, если есть выгиб $y_0(x)$, значит сила P создаст продольный момент, но без дополнительного выгиба $y_1(x)$:

$$M_p = P \cdot y_0(x), \tag{22}$$

и его можно подставить в уравнение оси стойки

$$EIy''(x) = -P \cdot y_0(x) \tag{23}$$

Если $y_0(x)$ задать для шарнирно-опертой стойки в виде

$$y_0(x) = a_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{24}$$

тогда $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ определяется из (23) без его решения.

M_p по (22) можно так задать, если возмущение силовое, как на рис. 2. Если возмущение задано, как начальная погибь, тогда сила P создает дополнительный прогиб $y_1(x)$ и момент будет:

$$M_p = P(y_0(x) + y_1(x)), \tag{25}$$

но это уже другая задача.

Чтобы иметь представление о величине возмущения, рассмотрим шарнирно-опертую колонну длиной 8м из двутавра № 40 ($I_y = 667 \tilde{n}^4$, $\tilde{A} = 206010 \tilde{l} \tilde{I} \tilde{a}$):

$$\bar{f} = \frac{1 \cdot 512 \cdot 10^6}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 6,67 \cdot 10^2} = 0,76 \cdot 10^{-2} \tilde{n}.$$

Возмущения меньше начальных несовершенств, но не больше. Ведь начальные несовершенства для реальных стержней, колонн, стоек – это возмущения, и рассчитываются эти реальные элементы на продольный изгиб от силы $P < P_{кр}$. Но мы рассматриваем идеальный стержень и возмущенное состояние, как заранее отклоненное положение стержня от оси действия горизонтальной силы. Для шарнирно-опертого стержня принимаем

$y_0(x) = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}$, прогиб от силы P естественно принять в форме $y_1(x) = f_1 \sin \frac{\pi x}{l}$. Общий прогиб $y(x) = (a_0 + a_1) \sin \frac{\pi x}{l}$. Момент от P

$$M_P(x) = P(f_0 + f_1) \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (26)$$

Подставим $y_1(x)$ и $M_P(x)$ в (23)

$$\frac{\pi^2}{l^2} EI \cdot f_1 \sin \frac{\pi x}{l} = P(f_0 + f_1) \sin \frac{\pi x}{l},$$

после сокращения получим

$$P_{кр} f_1 = P(f_0 + f_1), \text{ отсюда}$$

$$f_1 = \frac{f_0}{\frac{P_{кр}}{P} - 1}. \quad (27)$$

Формула (27) есть у А.С. Вольмира [3] при расчете шарнирно опертого стержня на устойчивость с начальной погибью. Но формула (27) не может описать бифуркацию идеальной стойки. Возмущение для идеальной стойки по типу начальной погиби делает ее реальной. Начальная погибь не вызывает упругого изгиба и не создает жесткости или отпорности. При загрузении балки и стержня появляется упругий дополнительный прогиб к погиби и формируется жесткость и отпорность. Поэтому возмущение для идеальной стойки должно быть силовым или кинематическим, как на рис. 2, г.

Почему так много уделяется внимания идеальной стойке, если это вопрос теоретический? Потому, что $P_{кр}$ для идеальной стойки применяется и для расчета реальных стержней.

Утверждение, что идеальная стойка при достижении силы $P = P_{кр}$ перестает быть устойчивой, и произойдет бифуркация, не отражает сути потери устойчивости. Идеальная стойка не теряет устойчивость ни при какой силе, а только если рассмотреть возмущенное состояние.

Выводы. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и стойки дают формулу прогиба и условия для определения несущей способности по второму предельному состоянию. Критическая сила для идеальных и реальных стержней одна и та же, но последствия разные: бифуркация и тенденция чрезмерно большому прогибу.

Потеря устойчивости прямолинейной формы стержня при продольном изгибе происходит при наличии двух факторов – силы и возмущения; при поперечном изгибе достаточно одной силы.

Возмущениями для реальных стержней являются начальные несовершенства, возмущения для идеальных стержней – силовые и кинематические. Нормативные или допускаемые ограничения могут быть и должны быть для реальных стержней, для идеальных стержней их определять не следует. Перемещения при продольном изгибе можно определить через интеграл Максвелла-Мора.

Література

1. Пановко, Я.Г., Механика деформируемого тела / Я.Г. Пановко. – М.: «Наука», 1985. – 287 с.
2. Тимошенко, С.П., Сопrotивление материалов, т. II / С.П. Тимошенко. – М.: «Наука», 1965. – 480 с.
3. Вольмир, А.С., Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир. – М.: Физматгиз, 1963. – 879 с.
4. Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко. – М.: «Наука», 1971. – 807 с.
5. Киселев, В.А. Строительная механика: Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов / В.А. Киселев. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.

References

1. Panovko, Ya.G., Mehanika deformiruemogo tela / Ya.G. Panovko. – M.: «Nauka», 1985. – 287 p.
2. Timoshenko, S.P., Soprotivlenie materialov, t. II / S.P. Timoshenko. – M.: «Nauka», 1965. – 480 p.
3. Volmir, A.S., Ustoychivost uprugih sistem / A.S. Volmir. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 879 p.
4. Timoshenko, S.P. Ustoychivost stержney, plastin i obolochek / S.P. Timoshenko. – M.: «Nauka», 1971. – 807 p.
5. Kiselev, V.A. Stroitel'naya mehanika: Spetsialnyiy kurs. Dinamika i ustoychivost sooruzheniy: uchebnik dlya vuzov / V.A. Kiselev. – 3-e izd., ispr. i dop. – M.: Stroyizdat, 1980. – 616 p.

ПРОБЛЕМА СТІЙКОСТІ ІДЕАЛЬНИХ І РЕАЛЬНИХ СТРИЖНІВ

КОБРИНЕЦЬ В.М., БЕКИРОВА М.М., КАЛІНІНА Т.О.

Одеська державна академія будівництва та архітектури

Мета. Обґрунтування походу до розв'язку проблеми стійкості центрально стислих ідеальних стрижнів.

Методика. Визначення несучої здатності стислого ідеального стрижня виконується за обуреним станом з використанням поздовжньо-поперечної жорсткості.

Результати. Отримані розрахункові формули, що визначають несучу здатність ідеальних і реальних стрижнів. Переміщення при поздовжньому вигині визначені через інтеграл Мору. Отримані формули критичних сил при силовім і кінематичнім збурюванні.

Наукова новизна. Уперше критична сила ідеального й реального стрижня визначена як несуча здатність. При цьому несуча здатність визначена різними способами. Показане, що факторами, що визначають умови втрати стійкості, є обурений стан і зовнішня сила.

Практична значимість. Методика, побудована на виконаних в роботі теоретичних і чисельних дослідженнях, дозволяє впливати на розмір критичної сили. Додатково побудована методика визначення переміщень при поздовжньо-поперечному вигині на основі інтеграла Мору.

Ключові слова: ідеальний стрижень, стійкість, піддатливість, жорсткість, несуча здатність.

THE PROBLEM OF THE STABILITY OF IDEAL AND REAL RODS

KOBRINETS V.M., BEKIROVA M.M., KALININA T.A.

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Goal. Justification of the approach to solving the problem of stability of centrally compressed ideal rods.

Methodology. Determination of the load-carrying capacity of a compressed ideal rod is performed on the disturbed state using the longitudinally flexural rigidity.

Results. The calculation formulas that determine the carrying capacity of ideal and real rods are obtained. The displacements in the longitudinal bending are defined in terms of the Mohr integral. Formulas of critical forces are obtained for force and kinematic perturbations.

Scientific novelty. For the first time, the critical strength of an ideal and a real rod is defined as a bearing capacity. In this case, the bearing capacity is determined in different ways. It is shown that the factors determining the conditions for the loss of stability are the disturbed state and external force.

Practical significance. The method, built on the theoretical and numerical studies performed in the work, makes it possible to influence the magnitude of the critical force. In addition, a technique is developed for determining the displacements in longitudinal-transverse bending based on the Mohr integral.

Keywords: ideal rod, stability, compliance, rigidity, load-bearing capacity.