

9. Ермилов П.И. Пигменты и пигментированные лакокрасочные материалы / П.И. Ермилов, Е.А. Индейкин, И.А. Толмачев. – Л.: Химия, 1987. – 200 с.
10. Электроактивированные водные системы в технологиях дизайна текстиля / [Романенко Н.Г., Сысоенко А.В., Дихтяренко М.Г., Яковец И.А.] // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2003. – №4. – с. 139–142.

Надійшла 14.04.2010

УДК 677.075

ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ВОДОВБИРАННЯ ТЕКСТИЛЬНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

Повідомлення 3

Методика визначення констант водовбирання текстильних матеріалів

В.І. ВЛАСЕНКО

Київський національний університет технологій та дизайну

Розроблено методику визначення констант водовбирання текстильних матеріалів за експериментальними даними, одна з яких є постійною складовою коефіцієнту дифузії, а друга – перемінна. Це дає змогу розраховувати вміст вологи в заданій точці матеріалу в заданий час, користуючись аналітичними залежностями, запропонованими в попередній роботі. Отримані залежності будуть використані для розробки аналітичної моделі водовбирання дво- та багатошаровими текстильними структурами

Постановка завдання

Розробити методику визначення констант водовбирання текстильних матеріалів, використовуючи результати макроекспериментів та математичне моделювання процесу розподілу вологи по товщині індивідуального шару матеріалу, за умови вбирання вологи перпендикулярно площині матеріалу.

Об'єкти та методи дослідження

Об'єкт досліджень – аналітичне рішення задачі визначення констант водовбирання текстильних матеріалів в нелінійній постановці задачі.

Предмет досліджень – методика визначення констант водовбирання текстильних матеріалів з використанням експериментальних даних.

Для математичного моделювання процесу водовбирання використовувались методи математичного аналізу.

Результати та їх обговорення

Вихідними даними для цієї частини роботи є: по-перше, аналітична нелінійна модель залежності водовбирання (питомої концентрації вологи) текстильним матеріалом та швидкості її зміни при проходженні вологи перпендикулярно площині матеріалу, яка була представлена в [1] формулами (1), (2).

$$U(t) = \int_0^1 U(z,t) dz = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8 \cdot e^{-A(2i-1)t^B}}{\pi^2 \cdot (2i-1)^2}, \quad (1)$$

$$v(t) = \frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8 \cdot A \cdot B \cdot t^{B-1} \cdot e^{-A(2i-1)t^B}}{\pi^2 \cdot (2i-1)} \quad (2)$$

де U – загальна концентрація вологи в матеріалі; t – час; A, B – константи водовбирання (безпосередньо з експерименту не визначаються); z – координата точки в матеріалі; $v(t)$ – швидкість зміни загальної концентрації вологи в матеріалі.

Наявність двох констант водовбирання пов'язана з необхідністю врахувати гальмування водовбирання при накопиченні вологи в матеріалі.

По-друге, в нашому розпорядженні є експериментальні дані, одержані нами для вибраних текстильних матеріалів [2], з яких ми визначаємо:

- t_{max} – час насичення, с;
- U_{max} – максимальне водовбирання, мг/см²;
- V_{max} – максимальна швидкість водовбирання, мг/см²·с;
- t_b – час досягнення максимуму швидкості водовбирання, с;

Оскільки рівняння (1) та (2) одержані як питомі, ми маємо можливість визначити реальну концентрацію та реальну швидкість

$$U(t) = U_{max} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8 \cdot e^{-A(2i-1)t^B}}{\pi^2 \cdot (2i-1)^2} \right) \quad (3)$$

$$V(t) = U_{max} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{8 \cdot A \cdot B \cdot t^{B-1} \cdot e^{-A(2i-1)t^B}}{\pi^2 \cdot (2i-1)} \right) \quad (4)$$

На рис. 1 наведені залежності концентрації вологи як функції часу при різній кількості членів ряду ($i = 1; 2; 3; 4$). З графіків видно, що число членів ряду впливає тільки на початкову ділянку (рис. 1, а). При виході на сталий режим може бути прийнятий один член ряду (рис. 1, б). Тому для часу насичення t_{max} можна записати:

$$U \approx 1 - \frac{8 \cdot e^{-A t_{max}^B}}{\pi^2}$$

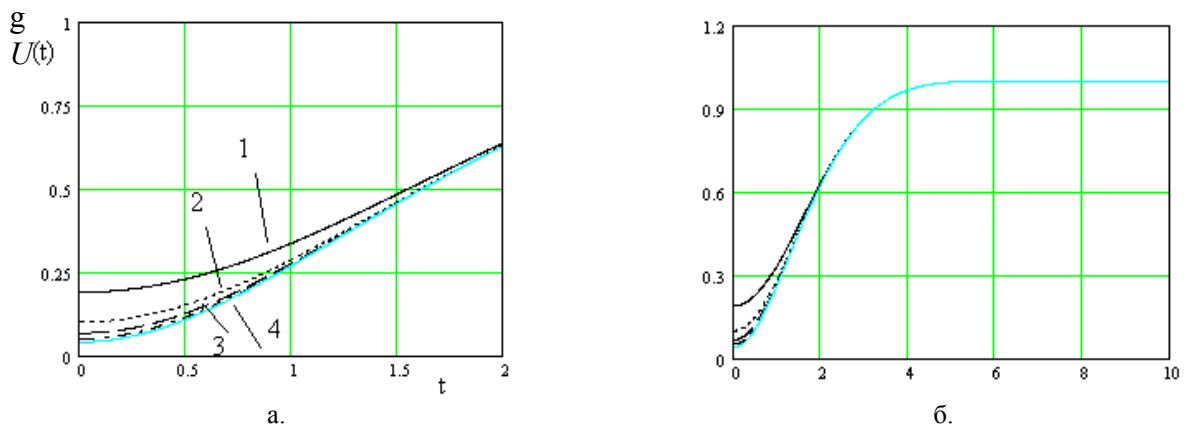


Рис.1. Кінетична крива вбирання вологи ($i = 1; 2; 3; 4$)

Другий доданок асимптотично наближається до нуля. Тому приймаємо, що процес насичення близький до завершення, коли досягається концентрація $U = (1 - \Delta) \cdot U_{\max}$ від максимальної. Для визначеності приймаємо $\Delta = 0,01$ (завершення процесу становить 99%). Тоді умова досягнення рівноваги

$$\frac{8 \cdot e^{-A \cdot t_{\max}^B}}{\pi^2} = \Delta .$$

З цього виразу визначимо співвідношення між двома невідомими параметрами.

$$A \cdot t_{\max}^B = -\ln \frac{\Delta \cdot \pi^2}{8} = M$$

Тоді залежність одного параметру від другого може бути записана як

$$A = \frac{-\ln \frac{\Delta \cdot \pi^2}{8}}{t_{\max}^B} = \frac{M}{t_{\max}^B}$$

Для випадку $\Delta = 0,01$

$$A = \frac{4,395}{t_{\max}^B}$$

Похідна швидкості водовбирання по часу

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2} \frac{A \cdot B \cdot [(B-1) \cdot t^{B-2} - A \cdot B \cdot (2i-1) \cdot t^{B-1} \cdot t^{B-1}] \cdot e^{-A(2i-1)t^B}}{(2i-1)}$$

Умова екстремуму – досягнення похідною нульового значення.

Виносимо постійні за знак суми. Умова, за якої вираз дорівнює нулю, буде мати вигляд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{[(B-1) \cdot t_b^{B-2} - A \cdot B \cdot (2i-1) \cdot t_b^{B-1} \cdot t_b^{B-1}] \cdot e^{-A(2i-1)t_b^B}}{(2i-1)} = 0$$

Перетворимо вираз з урахуванням одержаного значення параметру A

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_b^{B-2} \cdot \left[(B-1) - M \cdot B \cdot (2i-1) \left(\frac{t_b}{t_{\max}} \right)^B \right] \cdot e^{-M(2i-1) \left(\frac{t_b}{t_{\max}} \right)^B}}{(2i-1)} = 0$$

Винесемо спільні члени

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left[(B-1) - M \cdot B \cdot (2i-1) \left(\frac{t_b}{t_{\max}} \right)^B \right] \cdot e^{-M(2i-1) \left(\frac{t_b}{t_{\max}} \right)^B}}{(2i-1)} = 0 .$$

Введемо безрозмірну перемінну часу $\tau = \frac{t_b}{t_{\max}}$.

Побудуємо графіки функцій часу при різних значеннях B (рис.2)

$$f(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[(B-1) - M \cdot B \cdot (2i-1)(\tau)^B] \cdot e^{-M(2i-1)(\tau)^B}}{(2i-1)} = 0$$

gB

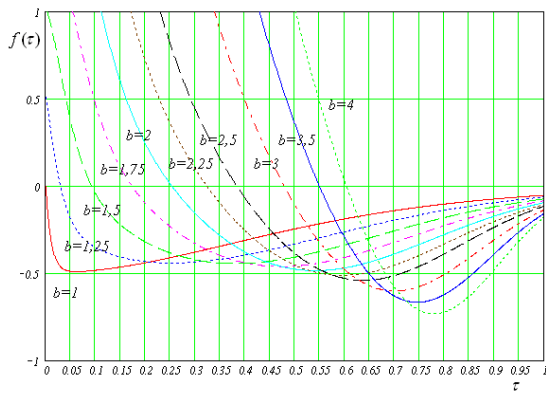


Рис.2. Графіки функцій часу при різних значеннях B



Рис.3. Графік функції B від τ (при $f(\tau) = 0$), одержаний з даних рис 2.

При перетинанні кривих з віссю абсцис похідна дорівнює нулю, що визначає умову екстремальності. Визначимо значення безрозмірного часу, при якому крива перетинає вісь абсцис для кожного значення B і побудуємо графік рис 3.

Апроксимуємо криву кубічною параболою виду: $B = 1 + a_1 \cdot \tau + a_2 \cdot \tau^2 + a_3 \cdot \tau^3$. Зафіксуємо значення B для трьох значень τ :

$$\tau = 0,1 \rightarrow B = 1,53;$$

$$\tau = 0,3 \rightarrow B = 2,15;$$

$$\tau = 0,5 \rightarrow B = 3,13.$$

Визначення коефіцієнтів кубічної параболі зводиться до рішення системи трьох рівнянь:

$$\begin{cases} 0,1 \cdot a_1 + 0,01 \cdot a_2 + 0,001 \cdot a_3 = 1,53 \\ 0,3 \cdot a_1 + 0,09 \cdot a_2 + 0,027 \cdot a_3 = 2,15 \\ 0,5 \cdot a_1 + 0,25 \cdot a_2 + 0,125 \cdot a_3 = 3,13 \end{cases}$$

Рішення системи дає: $B = 1 + 6,743 \cdot \tau - 16,8 \cdot \tau^2 + 23,667 \cdot \tau^3$.

Співставлення заданої кривої з апроксимуючою наведено на рис 4. Збіжність теоретичної кривої з експериментальною досить висока і становить 1 %.

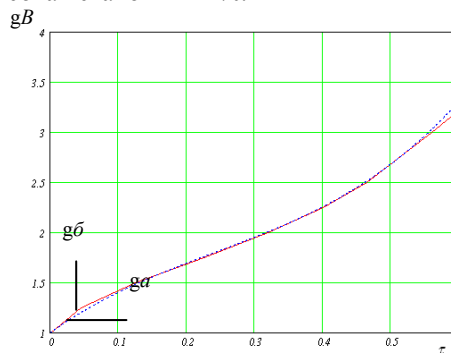


Рис.4. Співставлення експериментальної та теоретичної кривих:
а – експериментальна крива; б – теоретична крива

Таким чином, при визначених параметрах часу t_b та t_{max} константи дифузії визначаються із умови:

$$B = 1 + 6,743 \cdot \left(\frac{t_b}{t_{max}} \right) - 16,8 \cdot \left(\frac{t_b}{t_{max}} \right)^2 + 23,667 \cdot \left(\frac{t_b}{t_{max}} \right)^3$$

$$A = \frac{4,395}{t_{\max}^B}$$

З урахуванням цих даних можна отримати криві за формулами (3) і (4).

Виносимо з-під знаку суми виразу (4) дані, що не залежать від номеру ряду, і одержуємо вираз для максимальної швидкості (час досягнення якої дорівнює t_b)

$$V_{\max} = V(t_b) = U_{\max} \cdot \left(\frac{8M}{\pi^2 t_b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B \cdot \tau^B \cdot e^{-M(2i-1)\tau^B}}{(2 \cdot i - 1)} \right)$$

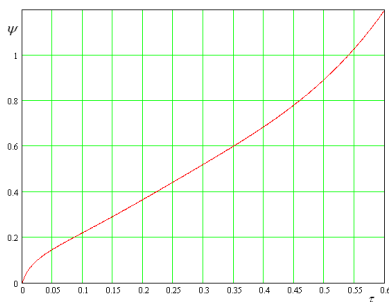
Враховуючи, що $\tau = \frac{t_b}{t_{\max}}$, вираз набуває вигляд:

$$\frac{V_{\max} \cdot t_b}{U_{\max}} = \frac{8M}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B \cdot \tau^B \cdot e^{-M(2i-1)\tau^B}}{(2 \cdot i - 1)}$$

Позначаємо ліву частину $\psi = \frac{V_{\max} \cdot t_b}{U_{\max}}$ та одержуємо:

$$\psi = \frac{8M}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B \cdot \tau^B \cdot e^{-M(2i-1)\tau^B}}{(2 \cdot i - 1)} \tag{5}$$

Побудуємо графік залежності ψ , як функції τ (рис.5).



Таблиця 1. Співвідношення ψ та τ

| Ψ | τ |
|--------|--------|
| 0,2 | 0,087 |
| 0,4 | 0,220 |
| 0,6 | 0,350 |
| 0,8 | 0,458 |
| 1,0 | 0,542 |

Рис. 5. Графік залежності ψ як функції τ

Як було показано [2], з експерименту ми одержуємо чотири взаємозалежних величини, що характеризують процес водовбирання: t_{\max} ; U_{\max} ; V_{\max} ; t_b .

Залежність (5) визначає зв'язок між чотирма експериментальними параметрами. Як основні ми вибираємо U_{\max} , V_{\max} , t_b , оскільки ці параметри визначаються з експерименту з достатньою точністю. Час досягнення максимального насичення t_{\max} визначається в експерименті приблизно, як час наближення до асимптоти. В явному виді це зробити неможливо. Цей час можна знайти із виразу (5) після проведення інтерполяції по точках. Наприклад, із графіку рис. 5 одержуємо співвідношення, надані в таблиці 1.

Залежність τ від Ψ шукаємо у вигляді поліному: $\tau = \alpha_1 \cdot \psi + \alpha_2 \cdot \psi^2 + \alpha_3 \cdot \psi^3 + \alpha_4 \cdot \psi^4 + \alpha_5 \cdot \psi^5$

Невідомі коефіцієнти визначаємо із рішення системи рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,04 & 0,008 & 0,0016 & 0,00032 \\ 0,4 & 0,16 & 0,064 & 0,0256 & 0,01024 \\ 0,6 & 0,36 & 0,216 & 0,1296 & 0,07776 \\ 0,8 & 0,64 & 0,512 & 0,4096 & 0,32768 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,187 \\ 0,22 \\ 0,35 \\ 0,458 \\ 0,542 \end{bmatrix}$$

Рішенням системи є: $\tau = 0,188 \cdot \psi + 1,667 \cdot \psi^2 - 2,432 \cdot \psi^3 + 1,458 \cdot \psi^4 - 0,339 \cdot \psi^5$

Побудуємо графік залежності τ як функції ψ (рис.6), з якого можна визначити $t_{\max} = \frac{t_b}{\tau}$.

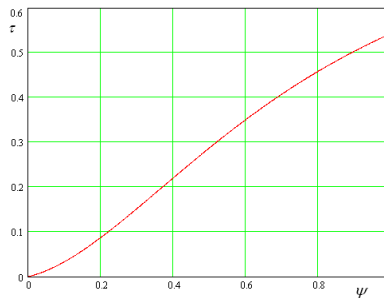


Рис 6. Графік залежності τ як функції ψ

Таким чином, ми пропонуємо наступний алгоритм визначення A та B – констант дифузії вологи в текстильних матеріалах за експериментальними даними (табл. 2).

Таблиця 2. Алгоритм визначення констант дифузії вологи в текстильних матеріалах

| | |
|------|---|
| 1. | Вихідні дані, визначені з експерименту: U_{\max} , V_{\max} , t_b |
| 2. | Розрахункові параметри: |
| 2.1. | $\psi = \frac{V_{\max} \cdot t_b}{U_{\max}}$ |
| 2.2. | $\tau = 0,188 \cdot \psi + 1,667 \cdot \psi^2 - 2,432 \cdot \psi^3 + 1,458 \cdot \psi^4 - 0,339 \cdot \psi^5$ |
| 2.3. | $t_{\max} = \frac{t_b}{\tau}$ |
| 2.4. | $B = 1 + 6,743 \cdot (\tau) - 16,8 \cdot (\tau)^2 + 23,667 \cdot (\tau)^3$ |
| 2.5. | $A = \frac{4,395}{t_{\max}^B}$ |

Як приклад, порівняємо експериментальні (рис. 7, а та рис. 8, а) та теоретичні (рис. 7, б та рис. 8, б) криві для текстильного полотна з умовним позначенням «Pq».

За алгоритмом (табл. 2) визначаємо параметри для полотна «Pq»:

- Вихідні дані, які визначаються з експерименту: $t_b = 5,6$ с, $U_{\max} = 77$ мг/см², $V_{\max} = 11$ мг/см·с (рис. 7, а) та (рис. 8, а).
- Розрахункові параметри:

$$\psi = \frac{11 \cdot 5,6}{77} = 0,8$$

$$\tau = 0,188 \cdot 0,8 + 1,667 \cdot 0,8^2 - 2,432 \cdot 0,8^3 + 1,458 \cdot 0,8^4 - 0,339 \cdot 0,8^5 = 0,458$$

$$t_{\max} = \frac{5,6}{0,458} = 12,23$$

$$B = 1 + 6,743 \cdot \left(\frac{5,6}{12,23}\right) - 16,8 \cdot \left(\frac{5,6}{12,23}\right)^2 + 23,667 \cdot \left(\frac{5,6}{12,23}\right)^3 = 2,839$$

$$A = \frac{4,395}{12,23^{2,838}} = 3,606 \times 10^{-3}$$

Співставлення експериментальних та теоретичних кривих (рис. 7) та (рис. 8) вказує на їх високу збіжність.

$gU, \text{ мг/см}$

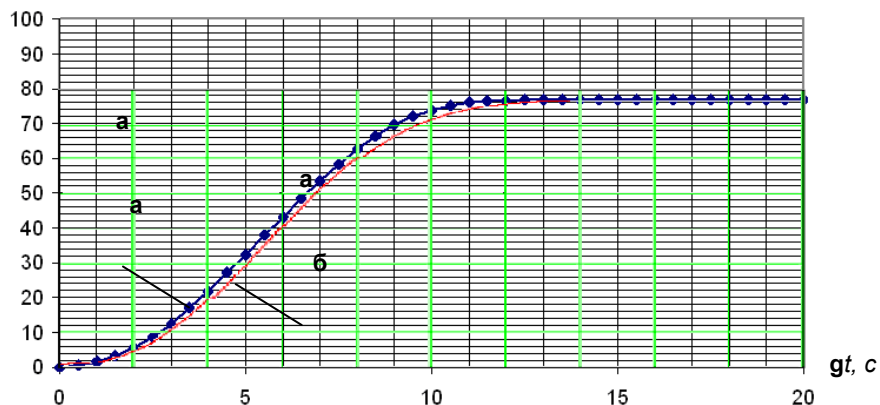


Рис.7. Співставлення експериментальної та теоретичної кривих водовбирання полотном «Pq»:

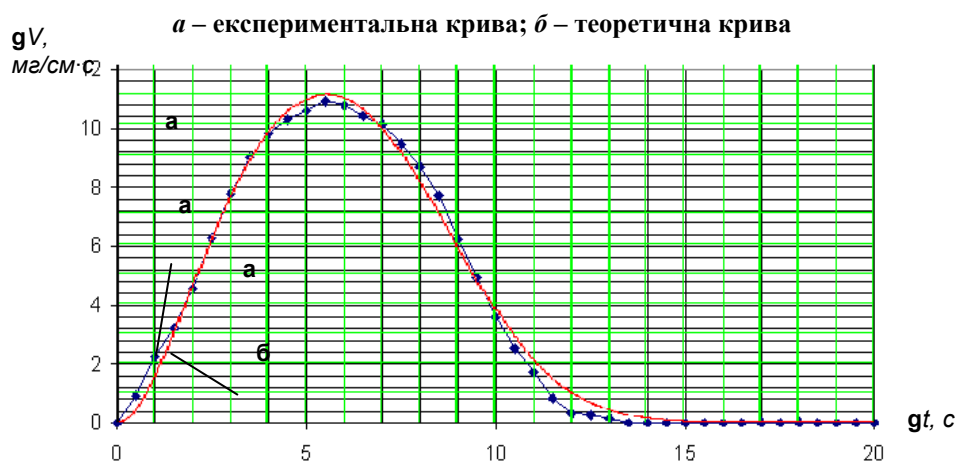


Рис.8. Співставлення експериментальної та теоретичної кривих швидкості водовбирання полотном «Pq»:

a – експериментальна крива; *b* – теоретична крива

Висновки

В статті представлена методика визначення констант водовбирання, які враховують їх залежність від вмісту води в матеріалі; одна з них є постійною складовою коефіцієнту дифузії, а друга – перемінною. В роботі також як основні (вихідні при розрахунках) запропоновані три незалежні показники водовбирання, визначені з експерименту. Графічні залежності, побудовані на основі математичного моделювання, мають високу збіжність з експериментальними даними. Отримані залежності будуть в подальшому використані для розробки аналітичної моделі водовбирання дво- та багатошаровими текстильними структурами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Власенко В.І. Теоретичні дослідження процесу водовбирання текстильними матеріалами. Повідомлення 2. Напівемпірична модель водовбирання текстильних матеріалів зі змінним коефіцієнтом дифузії // Вісник КНУТД. – 2010. – №1. – с. 93 – 99.
2. Власенко В.І. Дослідження процесу водовбирання текстильними матеріалами технічного призначення // Вісник КНУТД. – 2009. – №5. – с. 106 – 112.

Надійшла 05.05.2010