УДК 517.968.7

ПРОЕКЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ ТА КЕРУВАННЯМ

А. Ю. Лучка, О. Б. Нестеренко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We consider an application of the projection method to the boundary-value problem for integro-differential equations with restrictions and control, and propose a calculation scheme for the method.

Рассмотрено применение проекционного метода к краевой задаче для интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями и управлением и предложена вычислительная схема метода.

Важливими питаннями дослідження крайових задач для диференціальних рівнянь з обмеженнями та керуванням є встановлення умов існування розв'язків і розробка ефективних методів їх побудови. Цим питанням присвячено низку досліджень (див., наприклад, [1–4]). Застосуванню ітераційного методу до інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями і керуванням присвячено роботу [5]. Дана стаття є продовженням вказаної роботи, і в ній досліджується застосування проекційного методу до крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь.

1. Постановка задачі. Будемо розглядати інтегро-диференціальне рівняння

$$(Lx)(t) = f(t) + C(t)\lambda + \int_a^b H(t,s)(Mx)(s)ds \tag{1}$$

і шукати наближений розв'язок $(z(t), \lambda)$, який задовольняє крайові умови

$$U(x) = \gamma \tag{2}$$

та обмеження

$$\int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha. \tag{3}$$

В рівнянні (1) та умовах (2), (3) вважаємо

$$(Lx)(t) = x^{(m)}(t) + p_1(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + p_m(t)x(t),$$

$$(Mx)(t) = q_0(t)x^r(t) + \ldots + q_r(t)x(t), \quad r < m,$$

коефіцієнти $\{p_0, \ldots, p_m, q_0, \ldots, q_r\} \subset L_2[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $(1 \times l)$-матриця $C(t)$, $(l \times 1)$-матриця $S(t)$, елементи яких — лінійно незалежні функції, сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$, стала $(m\times 1)$-матриця U, елементи якої мають вигляд

$$U_\nu(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_{\nu i} x^{(i-1)}(a) + \beta_{\nu i} x^{(i-1)}(b)\right),$$

та $\gamma \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$ є заданими, ядро $H(t,s)$ — сумовне з квадратом за сукупністю змінних.

В статті [5] було розглянуто питання існування та єдиності розв'язку задачі (1) – (3) і обґрунтовано застосування до неї ітераційного методу. Ітераційний метод має обмежену область застосування і може збігатись повільно. В такому випадку пропонується до задачі (1) – (3) застосувати проекційний метод.

2. Проекційний метод. Суть проекційного методу стосовно задачі (1) – (3) полягає в тому, що, маючи деяке відоме наближення $(\widetilde{x}(t), \widetilde{\lambda})$ до шуканого розв'язку, наступне наближення шукаємо у вигляді

$$z(t) = \widetilde{x}(t) + \delta(t), \tag{4}$$

$$\lambda = \widetilde{\lambda} + \beta. \tag{5}$$

Функцію $\delta(t)$ та параметр β визначаємо із задачі

$$(A\delta)(t) = C(t)\beta + \Phi(t)\mu, \tag{6}$$

$$U(\delta) = 0, \quad \int_a^b S(t)\delta(t)dt = 0, \tag{7}$$

$$\int_a^b \Psi(t)\varepsilon(t)dt = 0, \tag{8}$$

де

$$\varepsilon(t) = f(t) + C(t)\lambda + \int_a^b H(t,s)(Mz)(s)ds - (Lz)(t). \tag{9}$$

У виразах (4) – (9)

$$(A\delta)(t) = \delta^{(m)}(t) + c_1(t)\delta^{(m-1)}(t) + \ldots + c_m(t)\delta(t),$$

коефіцієнти $c_i(t)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, $(1\times n)$-матриця $\Phi(t)$, $(n\times 1)$-матриця $\Psi(t)$, елементи яких — лінійно незалежні функції, сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$, є заданими, $\beta \in \mathbb{R}^l$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ — невідомі параметри.

Виберемо оператор A таким чином, щоб однорідна задача

$$(A\delta)(t) = C(t)\beta, \quad U(\delta) = 0, \quad \int_a^b S(t)\delta(t)dt = 0$$

мала лише тривіальний розв'язок. Тоді, як це встановлено в [5], існують такі функція $G(t,s)$ та $(l \times 1)$-матриця $P(s)$, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі зображується формулами

$$\delta(t) = \int\limits_a^b G(t,s)\Phi(s)\mu ds, \tag{10}$$

$$\beta = \int\limits_a^b P(s)\Phi(s)\mu ds. \tag{11}$$

Ввівши позначення

$$Y(t) = \int\limits_a^b G(t,s)\Phi(s)ds, \tag{12}$$

запишемо (10) у вигляді

$$\delta(t) = Y(t)\mu. \tag{13}$$

Відхил (9) із урахуванням (4), (5), (13), позначення $(Bz)(t) = (Az)(t) - (Lz)(t)$ та виразу (6) запишемо таким чином:

$$\varepsilon(t) = f(t) + C(t)\widetilde{\lambda} + C(t)\beta + \int\limits_a^b H(t,s)(M\widetilde{x})(s)ds + \int\limits_a^b H(t,s)(MY)(s)ds \cdot \mu +$$

$$+(B\widetilde{x})(t) - (A\widetilde{x})(t) + (BY)(t)\mu - (AY)(t)\mu =$$

$$= \widetilde{\varepsilon}(t) + C(t)\beta + \int\limits_a^b H(t,s)(MY)(s)ds \cdot \mu + (BY)(t)\mu - C(t)\beta - \Phi(t)\mu,$$

або

$$\varepsilon(t) = \widetilde{\varepsilon}(t) + \left(\int\limits_a^b H(t,s)(MY)(s)ds + (BY)(t) - \Phi(t)\right)\mu, \tag{14}$$

де

$$\widetilde{\varepsilon}(t) = f(t) + C(t)\widetilde{\lambda} + \int\limits_a^b H(t,s)(M\widetilde{x})(s)ds + (B\widetilde{x})(t) - (A\widetilde{x})(t). \tag{15}$$

Для визначення невідомого параметра μ скористаємось умовою (8) та формулами (14), (12), за якими отримаємо

$$\int\limits_a^b \Psi(t)\left(\Phi(t) - \int\limits_a^b K(t,s)\Phi(s)ds\right)\mu dt = \int\limits_a^b \Psi(t)\widetilde{\varepsilon}(t)dt, \tag{16}$$

де

$$K(t,s) = (BG)(t,s) + \int_a^b H(t,\xi)(MG)(\xi,s)d\xi. \tag{17}$$

Ввівши позначення

$$\Lambda = \int_a^b \Psi(t)\left(\Phi(t) - \int_a^b K(t,s)\Phi(s)ds\right)dt, \tag{18}$$

систему алгебраїчних рівнянь (16) можемо записати у вигляді

$$\Lambda\mu = \int_a^b \Psi(t)\widetilde{\varepsilon}(t)dt. \tag{19}$$

Припустимо, що матриця Λ є невиродженою. Тоді, розв'язавши систему (19) і підставивши отриманий розв'язок у вирази (11), (13), визначимо шукане наближення (4), (5).

3. Обґрунтування методу. Встановимо, що за умови, коли наближення $(\widetilde{x}(t),\widetilde{\lambda})$ визначається із задачі

$$(A\widetilde{x})(t) = C(t)\widetilde{\lambda} + \widetilde{y}(t), \tag{20}$$

$$U(\widetilde{x}) = \gamma, \quad \int_a^b S(t)\widetilde{x}(t)dt = \alpha, \tag{21}$$

в якій $\widetilde{y} \in L_2[a,b]$ — задана функція, проекційний метод (4)–(9) зводиться до проекційного методу для інтегрального рівняння.

Справді, як показано в статті [5], задача (1)–(3) зводиться до інтегрального рівняння вигляду

$$y(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)ds, \tag{22}$$

де $K(t,s)$ має вигляд (17), а

$$g(t) = f(t) + (Bh)(t) + \int_a^b H(t,s)(Mh)(s)ds. \tag{23}$$

В цій же статті за умови, накладеної на оператор A, також встановлено, що задача (20), (21) має єдиний розв'язок, який зображується таким чином:

$$\widetilde{x}(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)\widetilde{y}(s)ds, \tag{24}$$

$$\widetilde{\lambda} = \sigma + \int_a^b P(s)\widetilde{y}(s)ds. \tag{25}$$

Використовуючи формули (4), (10), (24), маємо

$$z(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)(\widetilde{y}(s) + \Phi(s)\mu)ds. \tag{26}$$

Якщо ввести позначення

$$v(t) = \widetilde{y}(t) + \Phi(t)\mu, \tag{27}$$

то вираз (26) можна записати у вигляді

$$z(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)v(s)ds. \tag{28}$$

Скориставшись формулами (4), (20), (6), (5), отримаємо

$$(Az)(t) = (A\widetilde{x})(t) + (A\delta)(t) = C(t)\widetilde{\lambda} + \widetilde{y}(t) + C(t)\beta + \Phi(t)\mu = C(t)\lambda + \widetilde{y}(t) + \Phi(t)\mu. \tag{29}$$

За допомогою виразів (9) та (29) відхил легко записати у вигляді

$$\varepsilon(t) = f(t) + C(t)\lambda + \int_a^b H(t,s)(Mz)(s)\,ds + (Bz)(t) - (Az)(t) =$$

$$= f(t) + \int_a^b H(t,s)(Mz)(s)ds + (Bz)(t) - \widetilde{y}(t) - \Phi(t)\mu. \tag{30}$$

Підставивши (28) у вираз (30), отримаємо

$$\varepsilon(t) = f(t) + \int_a^b H(t,s)(Mh)(s)\,ds + \int_a^b H(t,\xi)(MG)(\xi,s)v(s)\,dsd\xi +$$

$$+(Bh)(t) + \int_a^b (BG)(t,s)v(s)\,ds - v(t),$$

або, взявши до уваги формулу (17),

$$\varepsilon(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)v(s)ds - v(t). \tag{31}$$

Неважко помітити, що формули (27), (8), (31) визначають суть проекційного методу для інтегрального рівняння (22).

Таким чином, метод (4) – (9) розв'язування задачі (1) – (3) зводиться до проекційного методу для інтегрального рівняння (22) з ядром (17) і вільним членом (23), умови збіжності якого широко відомі в літературі.

4. Обчислювальна схема. Виконувати обчислення при побудові наближених розв'язків безпосередньо за формулами (4) – (9) інколи незручно, а тому доцільно розробляти зручні обчислювальні схеми. Наведемо одну з них, згідно з якою послідовно виконуємо наступні операції:

1. Задаємо оператор $(Ax)(t)$, функцію $\widetilde{y}(t)$, $(1 \times n)$-матрицю $\Phi(t)$ та $(n \times 1)$-матрицю $\Psi(t)$, елементи яких $\varphi_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, та $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, — лінійно незалежні функції, і знаходимо $(Bx)(t) = (Ax)(t) - (Lx)(t)$.

2. Визначаємо елементи $(1 \times n)$-матриці $Y(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) & \ldots & \eta_n(t) \end{pmatrix}$ і вектори $\sigma_j \in \mathbb{R}^l$, які є стовпцями $(l \times n)$-матриці E, із задач

$$(A\eta_j)(t) = C(t)\sigma_j + \varphi_j(t), \quad U(\eta_j) = 0, \quad \int_a^b S(t)\eta_j(t)dt = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{32}$$

3. Формуємо $(1 \times n)$-матрицю

$$Z(t) = (BY)(t) + \int_a^b H(t,s)(MY)(s)ds,$$

елементи якої обчислюємо за формулами

$$\xi_j(t) = (B\eta_j)(t) + \int_a^b H(t,s)(M\eta_j)(s)ds, \quad j = \overline{1,n}. \tag{33}$$

4. Із урахуванням виразів (18), (12), (17) знаходимо $(n \times n)$-матрицю

$$\Lambda = \int_a^b \Psi(t)(\Phi(t) - Z(t))dt,$$

елементи якої виражаються формулами

$$\Lambda_{ij} = \int_a^b \psi_i(t)(\varphi_j(t) - \xi_j(t))dt, \quad i,j = \overline{1,n}. \tag{34}$$

5. Визначаємо початкове наближення $(\widetilde{x}(t), \widetilde{\lambda})$ із допоміжної задачі

$$(A\widetilde{x})(t) = C(t)\widetilde{\lambda} + \widetilde{y}(t), \quad U(\widetilde{x}) = \gamma, \quad \int_a^b S(t)\widetilde{x}(t)dt = \alpha, \tag{35}$$

для розв'язку якої правильними є зображення (24), (25).

6. Обчислюємо відхил (15), який із урахуванням співвідношення (35) набирає вигляду

$$\widetilde{\varepsilon}(t) = f(t) + (B\widetilde{x})(t) + \int_a^b H(t,s)(M\widetilde{x})(s)ds - \widetilde{y}(t), \tag{36}$$

і компоненти вектора $d \in \mathbb{R}^n$:

$$d_i = \int_a^b \psi_i(t)\widetilde{\varepsilon}(t)dt, \quad i,j = \overline{1,n}. \tag{37}$$

7. Складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Lambda\mu = d, \tag{38}$$

і знаходимо її розв'язок $\mu \in \mathbb{R}^n$.

8. Визначаємо шукане наближення за формулами

$$z(t) = \widetilde{x}(t) + Y(t)\mu, \quad \lambda = \widetilde{\lambda} + E\mu. \tag{39}$$

Якщо виконати прості перетворення, легко впевнитись в тому, що запропонована обчислювальна схема (32) – (39) рівносильна методові (4) – (9).

Приклад. Застосуємо обчислювальну схему до задачі

$$x''(t) + 10\sqrt{t}x(t) = 3\lambda + 10t^3 + 5\int_0^1 (3\sqrt{ts} - 2)x(s)\,ds, \tag{40}$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 2, \quad \int_0^1 (7-9t)x(t)dt = 2,5. \tag{41}$$

Побудуємо наближений розв'язок при $n = 3$ і

$$\varphi_j(t) = a_j t^{j-1}, \quad \psi_j(t) = b_j t^{j-1}, \quad j = 1,2,3, \quad (Ax)(t) = x''(t), \quad \widetilde{y}(t) = 0. \tag{42}$$

Згідно зі схемою, насамперед слід знайти розв'язки задач

$$\eta_j''(t) = 3\sigma_j + a_j t^{j-1}, \quad \eta_j(0) = 0, \quad \eta_j(1) = 0, \quad \int_0^1 (7-9t)\eta_j(t)dt = 0, \quad j = 1,2,3.$$

Виконавши нескладні обчислення і взявши з метою компактного запису формул $a_1 = 3$, $a_2 = 3,78$, $a_3 = 4,62$, отримаємо

$$\eta_1(t) = 0, \quad \eta_2(t) = 0,0252(25t^3 - 33t^2 + 8t), \quad \eta_3(t) = 0,0154(25t^4 - 36t^2 + 11t), \tag{43}$$

$$\sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = -0,5544, \quad \sigma_3 = -0,3696. \tag{44}$$

Після цього, врахувавши формули (33) та (40), знайдемо функції

$$\xi_j(t) = 5\int_0^1 (3\sqrt{ts} - 2)\eta_j(s)ds - 10\sqrt{t}\eta_j(t), \quad j = 1, 2, 3,$$

або, виконавши обчислення із урахуванням даних (43),

$$\begin{gathered}\xi_1(t) = 0, \quad \xi_2(t) = 0,189 - (0,2544 + 2,016t - 8,316t^2 + 6,3t^3)\sqrt{t}, \\ \xi_3(t) = 0,231 - (0,3096 + 1,694t - 5,544t^2 + 3,85t^4)\sqrt{t}.\end{gathered} \tag{45}$$

Елементи матриці Λ обчислюємо за формулами (34). Якщо у другому виразі (42) покласти $b_1 = 1$, $b_2 = 5,005$, $b_3 = 9,009$ і врахувати ще функції (45), то будемо мати

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 1,701 & 1,309 \\ 7,5075 & 5,7092763 & 5,0432767 \\ 9,009 & 7,7469876 & 7,3624694 \end{pmatrix}, \tag{46}$$

причому всі елементи матриці є точними.

Тепер визначаємо початкове наближення із задачі

$$\widetilde{x}''(t) = 3\widetilde{\lambda}, \quad \widetilde{x}(0) = 1, \quad \widetilde{x}(1) = 2, \quad \int_0^1 (7 - 9t)\widetilde{x}(t)dt = 2,5,$$

яка має єдиний розв'язок

$$\widetilde{x}(t) = 1 - 0,2t + 1,2t^2, \quad \widetilde{\lambda} = 0,8. \tag{47}$$

Знаходимо, згідно з формулами (36) та (40), відхил

$$\widetilde{\varepsilon}(t) = 3\widetilde{\lambda} + 10t^3 + 5\int_0^1 (3\sqrt{ts} - 2)\widetilde{x}(s)ds - 10\sqrt{t}\widetilde{x}(t) - \widetilde{x}''(t)$$

і, збільшивши його в сім разів та врахувавши дані (47), після обчислень отримаємо

$$7\widetilde{\varepsilon}(t) = 70t^3 - 91 + (27,6 + 0,4t - 2,4t^2)\sqrt{t}, \tag{48}$$

а на основі формул (37) та (48) маємо

$$d_1 = -10,5, \quad d_2 = -25,1155667, \quad d_3 = -29,5270857. \tag{49}$$

Складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (38), у якій матриця системи та права частина мають вигляд (46) та (49), і знаходимо її розв'язок з точністю 10^{-7} :

$$\mu_1 = -4,0730526, \quad \mu_2 = 1,3747053, \quad \mu_3 = -0,4730451. \tag{50}$$

Таким чином, використавши формули (39), (43), (44) та (50), отримаємо шукане наближення

$$z(t) = \widetilde{x}(t) + \mu_2\eta_2(t) + \mu_3\eta_3(t), \quad \lambda = \widetilde{\lambda} + \sigma_1\mu_1 + \sigma_2\mu_2 + \sigma_3\mu_3,$$

або, зробивши нескладні операції,

$$z(t) = 1 - 0,0029931t + 0,3190506t^2 + 0,8660650t^3 - 0,1821225t^4; \quad \lambda = 4,2857532. \tag{51}$$

Відхилення початкового (47) і отриманого (51) наближень від точного розв'язку задачі (40), (41)

$$x^*(t) = 1 + t^2\sqrt{t}, \quad \lambda^* = 4,(285714)$$

наведено в таблиці.

t	$x^*(t)$	$\widetilde{x}(t)$	$z(t)$	$x^*(t) - \widetilde{x}(t)$	$x^*(t) - z(t)$
0,2	1,0178885	1,008	1,0188005	0,0098885	–0,0009122
0,4	1,1011928	1,112	1,1006166	–0,0108072	0,0005762
0,6	1,2788548	1,312	1,2765293	–0,0331452	0,0023255
0,8	1,5724334	1,608	1,5706257	–0,0355666	0,0018077
1	2	2	2	0	0
λ	4,(285714)	0,8	4,2857532	3,4857140	–0,0000130

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.

2. *Лучка А. Ю.* Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з обмеженнями // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання: Пр. Укр. мат. конгресу. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. — С. 43 – 59.

3. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и систем. анализ. — 1996. — № 3. — С. 82 – 96.

4. *Лучка А. Ю.* Парні системи функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями і методи їх розв'язання // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 1. — С. 113 – 125.

5. *Нестеренко О. Б.* Ітераційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями // Там же. — № 3. — С. 336 – 347.

Одержано 06.12.07