УДК 517.968.7

О. Б. Нестеренко (O. B. Nesterenko)

Київський національний університет технологій та дизайну

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

We establish conditions for the existence of solutions of the specific boundary value problem for the weakly nonlinear integral-differential equations with the given parameters.

Установлены условия существования решения конкретной краевой задачи для слабонелинейных интегро-дифференциальных уравнений с заданными параметрами.

У роботі [**2**] було розглянуто крайову задачу для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами та встановлено умови існування та єдиності розв'язку слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

В даній роботі проілюстровано на прикладі конкретної задачі положення теоретичних висновків [**1**]-[**4**].

Розглянемо задачу

$$x''(t) + px(t) = f(t) + \lambda \cos\frac{t}{2} + \varepsilon \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)|x(s)|ds, \tag{1}$$

$$x(-\pi) = x(\pi) = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos\frac{t}{2}dt = 0. \tag{2}$$

1) Зведемо задачу (1), (2) до рівносильного інтегрального рівняння. З цією метою візьмемо таку допоміжну задачу

$$x''(t) = \lambda \cos\frac{t}{2} + y(t), \ x(-\pi) = x(\pi) = 0, \ \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos\frac{t}{2}dt = 0. \tag{3}$$

Як буде видно із подальших викладів задача (3) має єдиний розв'язок при довільній відомій функції $y \in L_2[-\pi,\pi]$. Побудуємо його. Для цього знайдемо загальний розв'язок рівняння (3). Він має вигляд

$$x(t) = ct + d - 4\lambda\cos\frac{t}{2} + \int\limits_{-\pi}^{t}(t-s)y(s)ds. \tag{4}$$

Для визначення невідомих параметрів $\{c, d, \lambda\} \subset \mathbb{R}$ підставимо загальний розв'язок (4) в умови (2), в результаті чого, виконавши відповідні обчислення, будемо мати

$$d - \pi c = 0, \quad d + \pi c = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi - s)y(s)ds,$$

$$4d - 4\pi\lambda = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (4\cos\frac{s}{2} + 2s - 2\pi) y(s) ds.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо

$$d = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\pi - s) y(s) ds,\ c = \frac{d}{\pi},\ \lambda = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} y(s)\cos\frac{s}{2} ds,$$

а підставивши цей розв'язок у формулу (4), одержимо

$$x(t) = \frac{t+\pi}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\pi - s) y(s) ds - \frac{4}{\pi}\cos\frac{t}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} y(s)\cos\frac{s}{2} ds + \int\limits_{-\pi}^{\pi} (t - s) y(s) ds.$$

Отже, ввівши ще позначення
(5)

$$\Gamma(s) = -\frac{1}{\pi}\cos\frac{s}{2},\ G(t,s) = -\frac{4}{\pi}\cos\frac{t}{2}\cos\frac{s}{2} + \frac{1}{2\pi}\left\{ \begin{array}{ll} (t+\pi)(s-\pi), & t \le s, \\ (t-\pi)(s+\pi), & t \ge s, \end{array}\right.$$

розв'язок задачі (3) має вигляд

$$x(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} G(t,s) y(s) ds, \quad \lambda = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Gamma(s) y(s) ds, \tag{6}$$

тобто вигляд (10), (11) [**2**], у якого $h(t) = 0$, $\sigma = 0$, а ядра $G(t,s)$ та $\Gamma(s)$ визначаються формулою (5).

Очевидно, задача (1), (2) буде рівносильна задачі (3), якщо в останній покласти

$$y(t) = f(t) - px(t) + \varepsilon\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)|x(s)| ds,$$

а, підставивши сюди перший вираз (6), отримаємо інтегральне рівняння

$$y(t) = f(t) - p\int\limits_{-\pi}^{\pi} G(t,s) y(s) ds + \varepsilon\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(t+\xi)\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} G(\xi,s) y(s) ds\right| d\xi. \tag{7}$$

За теоремою 1 [**2**] задача (1), (2) рівносильна інтегральному рівнянню (7).

Поклавши в рівнянні (1)

$$p = \frac{12}{\pi^2},\ \varepsilon = \frac{1}{2\pi^2},\ f(t) = 6\pi^2 t - 12t^3, \tag{8}$$

і виконавши відповідні обчислення із врахуванням формул

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin s|a\sin s + b(\pi^2 s - s^3)| ds = 0, \tag{9}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos s|a\sin s + b(\pi^2 s - s^3)| ds = (24 - 2\pi^2) b, \tag{10}$$

які правильні при довільних a та b із $\mathbb{R}^+$, переконуємось в тому, що

$$x^*(t) = \pi^2(\sin t + \pi^2 t - t^3), \quad \lambda^* = 0 \tag{11}$$

є розв'язком задачі

$$x''(t) + \frac{12}{\pi^2}x(t) = 6\pi^2 t - 12t^3 + \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)|x(s)|ds + \lambda\cos\frac{t}{2}, \tag{12}$$

$$x(-\pi) = x(\pi) = 0, \; \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos\frac{t}{2}dt = 0.$$

Оскільки, виконавши обчислення із використанням формули (5), маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} G(t,s)(-6\pi^2 s - \pi^2\sin s)ds = \pi^2(\sin t + \pi^2 t - t^3), \tag{13}$$

то неважко побачити, що функція

$$y^*(t) = -6\pi^2 t - \pi^2 \sin t \tag{14}$$

є розв'язком інтегрального рівняння (7), у якого параметри p, ε і вільний член $f(t)$ мають вигляд (8).

На основі формул (11), (13) та (14) маємо

$$x^*(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} G(t,s)y^*(s)ds \quad y^*(t) = \frac{d^2}{dt^2}x^*(t),$$

що підтверджує висновок теореми 1 [**2**].

2) Встановимо достатні умови, при виконанні яких інтегральний оператор

$$(My)(t) = f(t) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} pG(t,s)y(s)ds + \tag{15}$$

$$+\varepsilon\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(t+\xi)\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}G(\xi,s)y(s)ds\right|d\xi$$

є оператором стиску. Для цього достатньо знайти константи в нерівностях (16) - (18) [**2**]. Оскільки для нашого прикладу

$$K(t,s) = -pG(t,s), \quad F(t,u) = |u|,$$

то, очевидно, в нерівностях (16) - (18) [**2**] $\eta = |p|\nu$ та $\tau_0 = 1$, де ν — константа в (17) [**2**] при $i = 0$. Отже, знайшовши константи $\varkappa$ та ν і використавши формулу (22) [**2**], маємо

$$\rho = |p|\nu + \varepsilon\varkappa\nu. \tag{16}$$

Проаналізувавши явний вигляд ядер, що фігурують у формулі (15), зокрема (5), можна встановити правильність для будь-якої функції $y \in$

$L_2[-\pi,\pi]$ нерівностей

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t+s)y(s)ds\right|^2 dt \le \pi^2\int_{-\pi}^{\pi}|y(s)|^2 ds, \tag{17}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}G(t,s)y(s)ds\right|^2 dt \le \int_{-\pi}^{\pi}|y(s)|^2 ds, \tag{18}$$

а звідси уже випливає, що $\varkappa=\pi$, $\nu=1$.

Справді, нехай a та b — коефіцієнти Фур'є функції $y(t)$, тобто

$$a=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(s)\cos s ds,\quad b=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(s)\sin s ds, \tag{19}$$

тоді згідно з відомою нерівністю Бесселя маємо

$$\pi^2(a^2+b^2)\le\int_{-\pi}^{\pi}|y(s)|^2 ds. \tag{20}$$

Оскільки, врахувавши (19) правильна рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t+s)y(s)ds = a\pi\sin t + b\pi\cos t,$$

то, прийнявши ще до уваги (20), маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t+s)y(s)ds\right|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi}(a\pi\sin t+b\pi\cos t)^2 dt =$$

$$= \pi^2(\pi a^2+\pi b^2)\le\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}|y(s)|^2 ds,$$

тобто нерівність (17) правильна, причому вона точна, бо рівність досягається на функції $y(t)=\alpha\cos t+\beta\sin t$, де α, β — довільні параметри.

Переходимо до встановлення другої нерівності (18). Спершу зауважимо, що із явного вигляду функції (5) випливає, що інтегральний оператор

$$(Gy)(t)=\int_{-\pi}^{\pi}G(t,s)y(s)ds \tag{21}$$

самоспряжений, а в цьому випадку

$$\|G\|=\max_{\sigma(G)}|\mu|,$$

де $\sigma(G)$ — спектр оператора (21). Знайдемо цей спектр. Для цього розглянемо спектральну задачу

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(t,s)y(s)ds = \mu\varphi(t). \tag{22}$$

На основі аналізу явного вигляду ядра (5) і відомих фактів приходимо до висновку, що спектр $\sigma(G)$ — це множина власних значень

$$\mu_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ -\dfrac{4}{n^2}, & n \neq 1, n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{23}$$

а власними функціями є

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \cos\dfrac{n}{2}t, & n = 2m-1, \\ \\ \sin\dfrac{n}{2}t, & n = 2m, m \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{24}$$

тобто справджується рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(t,s)\varphi_n(s)ds = \mu_n\varphi_n(t). \tag{25}$$

Правильність рівності (25) перевіримо обчисленнями. Нехай

$$\eta_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} G(t,s)\varphi_n(s)ds, \tag{26}$$

тоді рівність (25) прийме вигляд

$$\eta_n(t) = \mu_n\varphi_n(t). \tag{27}$$

Можна безпосередньо вести обчислення за формулою (26) із врахуванням явного вигляду ядра (5), однак на такому шляху виникають певні обчислювальні труднощі. Краще знайти розв'язок задачі

$$\eta_n''(t) = \lambda_n \cos\frac{t}{2} + \varphi_n(t), \; n \in \mathbb{N}, \tag{28}$$

$$\eta_n(-\pi) = \eta_n(\pi) = 0 \; \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\cos\frac{t}{2} = 0, \tag{29}$$

а це рівносильно побудові функції $\eta_n(t)$ за формулою (26).

Так, прийнявши до уваги вираз (24), загальним розв'язком рівняння (28) є

$$\eta_n(t) = c_n t + d_n - 4\lambda_n \cos\frac{t}{2} - \frac{4}{n^2} \begin{cases} \cos\dfrac{n}{2}t, & n = 2m-1, \\ \\ \sin\dfrac{n}{2}t, & n = 2m, m \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{30}$$

Невідомі параметри c_n, d_n та λ_n визначаємо із системи алгебраїчних рівнянь

$$d_n - \pi c_n = 0,\ d_n + \pi c_n = 0,\ -4\pi\lambda_n = \begin{cases} 4\pi, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1, \end{cases}$$

яка виникає при підстановці виразу (30) в умови (29) і відповідних обчислень. Розв'язавши їх, маємо

$$c_n = d_n = 0, \lambda_n = \begin{cases} -1, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases} \tag{31}$$

Підставивши (31) в (30) і врахувавши формулу (24), отримаємо

$$\eta_n(t) = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ -\dfrac{4}{n^2}\varphi_n(t), & n \neq 1. \end{cases} \tag{32}$$

Із формул (27) і (32) очевидним чином випливає правильність співвідношень (23).

Можна довести, що крім власних значень (23), інших немає. Отже, $\|G\| = 1$, тобто правильна нерівність (18).

Таким чином, формула (16) має вигляд

$$\rho = |p| + \pi\varepsilon \tag{33}$$

і за умови $\rho < 1$ оператор (21) є оператором стиску. А це означає, що за цієї умови задача (1), (2) має єдиний розв'язок і його можна побудувати ітеративним методом.

Зазначимо, що у випадку, коли параметри p та ε мають значення (8), згідно з формулою (33)

$$\rho = \frac{12}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi} > 1,$$

а тому питання про єдиність розв'язку задачі (12) і про застосування до неї ітераційного методу відкриті.

Зосередимо ще нашу увагу на випадку, коли в рівнянні (1)

$$p = 1,\ \varepsilon = \frac{1}{5\pi},\ f(t) = \frac{10\pi t}{12 - \pi^2}(\pi^2 - 6 - t^2) - 4\sin t. \tag{34}$$

В цьому випадку за формулою (33) маємо $\rho = 1,2 > 1$, а тому застосування ітераційного методу до такої задачі відкрите. Провівши обчислення з використанням формул (9), (10) пересвідчуємось в тому, що задача (1),(2) та інтегральне рівняння (7) із даними (34) мають розв'язки вигляду

$$x^*(t) = \frac{10\pi t}{12 - \pi^2}(\pi^2 - t^2) + c\sin t,\ \lambda^* = 0,$$

$$y^*(t) = -\frac{60\pi}{12 - \pi^2}t - c\sin t$$

відповідно, де c — довільна невід'ємна стала.

Литература

[1] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. - Киев: Наук. думка, 1985. - 244 с.

[2] А.Ю. Лучка , О.Б. Нестеренко Методи розв'язування крайових задач для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами і обмеженнями // Укр. мат. журн. – 2009.– Т.61, №5. – С. 672–679.

[3] Лучка А.Ю. Проекционно-интеративные методы. - Киев: Наук. думка, 1993. - 288 с.

[4] Нестеренко О.Б. Ітераційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. –2007. –Т.10, №3. – С.336–347.