

УДК 539.4:620.172.251.1

**РОЗПОДІЛ ЕЛЕКТРИЧНОГО ТА ТЕПЛОВОГО ПОЛІВ У ПРОВІДНОМУ
МАТЕРІАЛІ ЗА УМОВ НЕОДНОРІДНОСТІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ**

Л.С. НОВОГРУДСЬКИЙ, К.М. БИЧКОВА, І.Ю. КОПА

Київський національний університет технологій та дизайну

Розглянуто розподіл електричного струму в зоні кільцевого надрізу циліндричного стрижня та оцінено ступінь концентрації електричного струму в зоні кільцевого концентратора

Одним із найбільш важливих напрямків використання явища надпровідності є створення енергетичних установок з надпровідними магнітними системами, що дозволять суттєво підвищити коефіцієнт корисної дії, одиничну потужність та зменшити металоємність їх конструктивних елементів. Вузли таких установок мають досить складну геометричну форму та експлуатуються в умовах, що характеризуються особливою екстремальністю: високим рівнем напружень, криогенними температурами і дією в перехідних режимах імпульсів електричного струму великої густини.

Об'єкти та методи дослідження

Об'єктом дослідження виступає розподіл теплового та електричного полів в області концентратора напруги. Використовували такі методи дослідження, як методи теорії пружності, теорії пластичності, електродинаміки, теплопровідності, магніто- та електропружності.

Постановка завдання

Відомо, що міцність більшості металів і сплавів при пониженні температури зростає, та при цьому збільшується і небезпека їх переходу у крихкий стан. Несівні елементи енергетичних установок з надпровідними магнітними системами можуть містити конструктивні концентратори напружень та дефекти, що виникли при виготовленні та експлуатації конструкції, що поряд зі збільшенням схильності металів до крихкого руйнування при криогенних температурах призводить до концентрації електромагнітного та теплового полів в області концентраторів, обумовлюючи дію додаткових навантажень на матеріал та зміну його властивостей. В даний час досить широко розглянута закономірність впливу імпульсів електричного струму на механічні характеристики і граничний стан конструкційних сплавів при криогенних температурах лише в умовах однорідного напруженого стану [1--2], але цих даних недостатньо для всебічної оцінки напружено-деформованого стану реальних конструкцій. Оцінці ступеню концентрації електричного струму в зоні кільцевого концентратора і присвячена дана робота.

Результати та їх обговорення

Задачу про розподіл електричного поля у циліндричному стрижні з кільцевим надрізом при дії на нього імпульсів електричного струму вирішувати будемо в стаціонарному наближенні, тобто в окремих випадках періодичних полів, що залежать від часу t , як $\exp(\pm i\omega t)$, у зв'язку з інваріантністю амплітуди і періоду коливань в кожній точці в часі [3]. При аналізі імпульсних електромагнітних процесів також використовують наближення до режиму, що встановився, звертаючись до стаціонарного наближення [4].

З рівняння Лапласа [5] визначаємо потенціал поля стаціонарного струму:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \tag{1}$$

Для кільцевого надрізу гіперболічного профілю розв'язок рівняння Лапласа зручно вести в еліптичних координатах, рис. 1, де поверхня $u = const$ -- є еліпсоїдом, поверхня $v = const$ -- гіперболоїдом обертання навколо осі X, і поверхня $w = const$ площиною, що проходить через вісь X. Тоді рівняння Лапласа для потенціалу еліптичного поля прийме вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{chu} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(chu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sin v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \left(\frac{1}{\sin^2 v} - \frac{1}{ch^2 u} \right) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} \right] = 0, \tag{2}$$

де $h = h_u = h_v = \sqrt{sh^2 u + \cos^2 v}$ - коефіцієнт спотворення при переході до еліптичних координат.

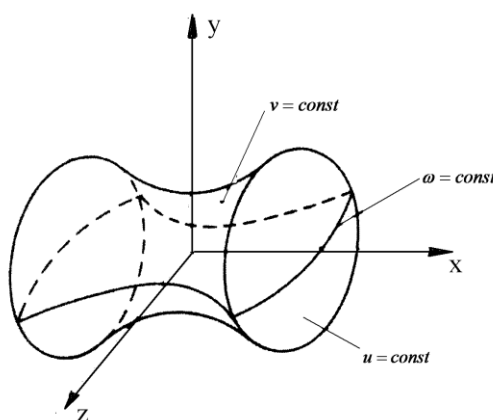


Рис. 1. Кільцевий концентратор в еліптичних координатах

Загальне рішення рівняння Лапласа в еліптичних координатах отримано Нейбером [6] у вигляді:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} N_{n,v}(chu) \cdot [a_{n,v} \cdot N_{n,v}(\sin v) + b_{n,v} \cdot N_{n,-v-1}(\sin v)] \cdot [c_n \cdot \sin(nw) + d_n \cdot \cos(nw)] + [c_n \cdot \sin(nw) + d_n \cdot \cos(nw)] + a_{0,0}(\ln chu + \ln \sin v), \tag{3}$$

де $N_{n,v}(\lambda)$ -- функція, одержана розкладом λ в степеневий ряд.

Для одержання чисельного рішення розглянемо інтеграл струму. Координатні поверхні $v = const$, які є сімейством конфокальних гіперболоїдів обертання, утворюються сукупністю ліній струму, які при $v = v_0$ збігаються з поверхнею надрізу. Нормальні складові вектора щільності струму відсутні і, отже, потенціальні поверхні збігаються із сімейством конфокальних еліпсоїдів обертання $u = const$.

Таким чином,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \tag{4}$$

і інтеграл струму можна записати у вигляді:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{v_0} \delta \cdot ch^2 u \cdot \sin v \cdot \cos v dv dw. \quad (5)$$

Даний інтеграл повинен мати постійне значення, що не залежить від u . Наприклад, ми можемо вважати u дуже великим ($u \rightarrow \infty$). Тоді $chu = \frac{1}{2} e^u$, отже, u в підінтегральну функцію входить тільки у вигляді множника e^{2u} . При цій умові інтеграл може не залежати від u тільки тоді, коли щільність струму δ при великій величині u буде пропорційна $\frac{1}{e^{2u}}$. Але це відбудеться лише тоді, коли функції, через які виражається потенціал, мають для v значення $v = -1$. В силу осьової симетрії в рішенні не повинно бути координати w . Звідси випливає, що в співвідношенні (3) необхідно дорівняти $n = 0$. У доданках, що залежать від v , потрібно вважати рівними нулю $a_{n,v}$ або $b_{n,v}$. Приймемо $a_{n,v} = 0$. Тоді рішення рівняння Лапласа запишеться у вигляді:

$$\varphi = A \cdot \text{arcctg}(shu), \quad (6)$$

де A -- деяка константа. Щільність електричного струму в однорідному ізотропному середовищі визначається з виразу:

$$\vec{\delta} = \gamma \cdot \vec{E}, \quad (7)$$

де γ -- питома електрична провідність. \vec{E} -- напруженість електричного поля, що дорівнює в еліптичній системі координат:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{1}{\sqrt{sh^2 u + \cos^2 v}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \vec{e}_u + \frac{1}{\sqrt{sh^2 u + \cos^2 v}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \vec{e}_v + \frac{1}{chu \cdot \sin v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \vec{e}_w \right), \quad (8)$$

де $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ -- направляючі вектори. Беручи до уваги умову (4), а також осьову симетрію зразка, тобто $\frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0$, перепишемо рівняння (8):

$$\vec{E} = -\left(\frac{1}{\sqrt{sh^2 u + \cos^2 v}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \vec{e}_u \right). \quad (9)$$

З врахуванням (6) величина щільності струму:

$$\delta = -\left(\frac{\gamma}{\sqrt{sh^2 u + \cos^2 v}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) = \frac{A \cdot \gamma \cdot chu}{(1 + sh^2 u) \cdot \sqrt{sh^2 u + \cos^2 v}}. \quad (10)$$

Для знаходження константи A запишемо рівняння для щільності струму в найменшому перетині (при $u = 0$):

$$\delta_{u=0} = \frac{A \cdot \gamma}{\cos v}, \quad (11)$$

а також інтеграл струму для цього перетину:

$$I_{u=0} = \int_0^{2\pi} \int_0^{v_0} \delta_{u=0} \cdot ch^2 u \cdot \sin v \cdot \cos v dv dw = \int_0^{2\pi} \int_0^{v_0} A \cdot \gamma \cdot ch^2 u \cdot \sin v \cdot \cos v dv dw = , \quad (12)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \gamma (1 - \cos v_0)$$

З огляду на те, що $I_{u=0} = \delta_\infty \cdot \pi \cdot v_0^2$, δ_∞ - щільність струму на нескінченності, a_0 -- радіус найменшого перетину, і підставляючи в (10) значення константи А з (12), запишемо рівняння для визначення щільності струму в будь-якій точці в області кільцевого надрізу гіперболічного профілю на циліндричному зразку:

$$\delta = \delta_\infty \cdot \frac{v_0^2}{2 \cdot (1 - \cos v_0)} \cdot \frac{chu}{(1 + sh^2 u) \cdot \sqrt{sh^2 u + \cos^2 v}}, \quad (13)$$

де $v_0 = \arctg \sqrt{a_0/r}$ -- отримуємо із рівняння гіперболи з радіусом кривизни r в основі.

Для найменшого перетину, в якому значення $u = 0$, рівняння (13) приймає вигляд:

$$\delta = \delta_\infty \cdot \frac{v_0^2}{2 \cdot (1 - \cos v_0) \cdot \cos v}, \quad (14)$$

де v -- радіальна координата точки найменшого перетину, у якій визначається щільність струму δ , $v = \arcsin a$, $a \in [0, a_0]$.

Результати обчислень розподілу щільності струму в найменшому перетині циліндричного зразка з кільцевим надрізом з різними радіусами кривизни в основі теоретичної гіперболи при $a_0 = 2$ мм представлені на рис. 2.

Як видно з аналізу наведених кривих, максимальна щільність струму буде в основі надрізу, тобто при $a = a_0$, коли $v = v_{\max} = v_0$. Тоді:

$$\delta_{\max} = K_\sigma \cdot \delta_\infty, \quad (15)$$

де $K_\sigma = \frac{v_0^2}{2 \cdot \cos v_0 \cdot (1 - \cos v_0)}$ -- коефіцієнт концентрації щільності струму в основі надрізу.

Слід зазначити, що значення K_σ з точністю до постійного множника збігаються зі значеннями теоретичного коефіцієнта концентрації напружень α_σ , що визначені по інтерполяційній формулі Нейбера. Значення місцевих коефіцієнтів концентрації щільності струму $K_{\sigma a}$ в точці поперечного перетину з радіальною координатою a можна визначити із співвідношення:

$$K_{\sigma a} = \frac{\delta_a}{\delta_\infty}, \quad (16)$$

де δ_a -- щільність струму в даній точці поперечного перетину.

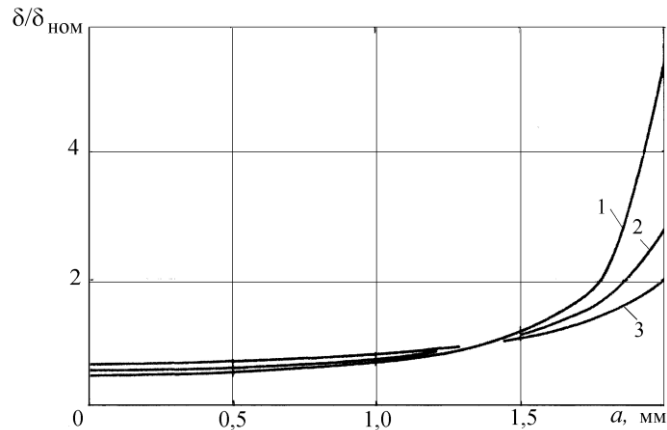


Рис. 2. Розподіл щільності електричного струму δ в найменшому поперечному перетині циліндричного зразка з кільцевим надрізом: 1 – $\rho = 0,02$ мм; 2 – $\rho = 0,1$ мм; 3 – $\rho = 0,25$ мм

Висновки

Встановлена закономірність розподілу електричного струму в найменшому перетині кільцевого надрізу циліндричного стрижня, та показано, що густина електричного струму досягає найбільшого значення в основі надрізу, а значення коефіцієнту концентрації струму у цій точці з точністю до постійного множника співпадають із значеннями теоретичного коефіцієнта концентрації напружень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стрижало В.А., Новогрудський Л.С., Вороб'єв Е.В. Прочность материалов криогенной техники при электромагнитных воздействиях. – К: Наукова думка – 1990. – 196 с.
2. Стрижало В.А., Новогрудський Л.С. Низкотемпературное упрочнение сталей в условиях неоднородного напряженного состояния и действия импульсов электрического тока. – Пробл. прочности. – 2007. – №4. – с.40–49.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения математической физики в частных производных. – М.: Физматгиз – 1962. – 670 с.
4. Михайлов В.М. Импульсные электромагнитные поля. □ Харьков: Высш. школа. – 1979. – 138 с.
5. Татур Т.А. Основы теории электромагнитного поля: справочное пособие для электротехн. спец. ВУЗов. – М.: Высш. школа – 1989ю – 271 с.
6. Нейбер Г. Концентрация напряжений. – М. – Л.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.