

УДК519.688

ЗАСТОСУВАННЯ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ЕЛАСТОМЕРІВ

Лаврик В.В., кандидат фізико-математичних наук
Київський національний університет технологій та дизайну

Ключові слова: метод скінчених елементів, моментна схема скінчених елементів, САПР, QFEM, механіка еластомерів.

Насправді, використовуючи традиційні схеми методів скінчених елементів (МСЭ) побудованих з урахуванням варіаційного методу Лагранжа на вирішення завдань із особливостями (облік слабкої стисливості матеріалів), виникають певні труднощі, подолання яких використовують варіаційні методи різного виду. Це методи Ху- Вашіцу (змішаний метод), Кастільяно (метод сил) та ін [1]. Але «метод сил» не знайшов широкого застосування в розрахунках конструкцій через складність апроксимації напружено-деформованого стану об'єкта.

"Змішані методи", на відміну від "методу сил", знайшли повсюдно використовуються при створенні машинобудівних конструкцій. Зокрема, на дослідження напруженого стану еластомерів використовують варіаційні принципи Л.П. Германа, З. Кея, Й. Нагтегала [2].

Крім позитивних моментів, змішані моделі МСЕ мають ряд недоліків: великий порядок роздільної здатності системи порівнянь з МСЕ у формі методу переміщень. Тому для завдань із зазначеною особливістю краще МСЕ у формі методу переміщень на базі варіаційного принципу Лагранжа [3].

Останніми роками постає питання розробки інструментальних систем автоматизованого проєктування (САПР), у яких використовувалися б наведені вище варіаційні принципи. Сучасні розрахунково-обчислювальні комплекси, призначені для вивчення властивостей матеріалів, що знаходяться в напружено-деформованому стані, містять цілий ряд методів наближених обчислень: розв'язання великих систем алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, чисельне інтегрування і диференціювання і т.д., а також велика кількість. У даній роботі представлено вивід формули потенційної енергії системи для скінченого кубічного елемента на підставі моментної схеми СЕ, з подальшим її використанням для розрахунку в системі QFEM [4].

Формулу потенційної енергії для кубічного скінченого елемента з одиничними ребрами виражену тільки через вузлові зрушення та змінні x , y , z представляється у вигляді:

$$\Pi = \frac{1}{8} \mu \iiint_V (a + a_x + a_y + a_z + a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} + a_{x^2y} + a_{x^2z} + a_{y^2x} + a_{y^2z} + a_{z^2x})$$

(1)

Практична частина дослідження присвячена аналізу осадки гумового віброізолятора ВР-201, який є елементом, що використовується для зменшення вібраційного впливу в машинобудівних конструкціях. Віброізолятори цього типу застосовуються як пружні елементи, що з'єднують рухомі та нерухомі частини машин, а також забезпечують ефективне гасіння вібрацій, зокрема від вентиляторів. Матеріалом для їх виготовлення є гума суміш марки 51-1562.

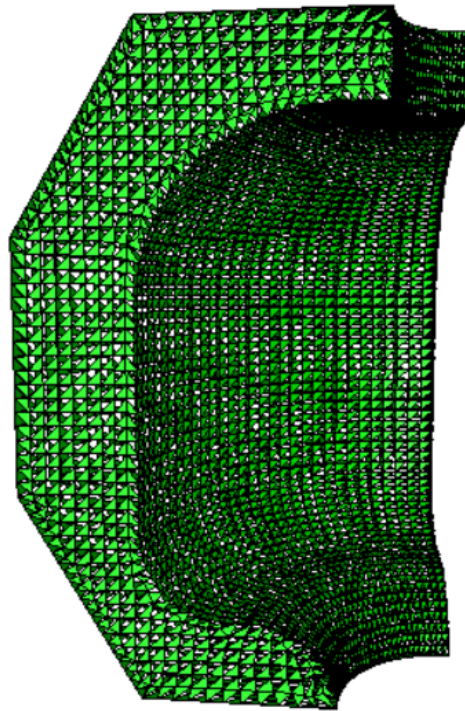


Рисунок 1 – Модель віброізолятора ВР-201

Розрахунок проводився для моделі з жорстко закріпленою основою та розподіленим навантаженням на верхню поверхню. Важливим фактором, що впливає на поведінку конструкції, є зміна коефіцієнта Пуассона матеріалу в процесі експлуатації. Експериментальні дані свідчать, що внаслідок зносу матеріалу цей коефіцієнт змінюється, що призводить до суттєвого збільшення осадки віброізолятора.

Для чисельного аналізу була побудована регулярна скінчено-елементна модель із використанням системи QFEM. Модель містить понад 12 тисяч вузлів і понад 6 тисяч елементів. Оскільки об'єкт має осьову

симетрію, для спрощення розрахунків розглядалася лише його четверта частина. Отримані результати показали, що зі збільшенням коефіцієнта Пуассона осадка конструкції зростає більш ніж у два рази протягом терміну експлуатації.

Для перевірки адекватності запропонованої розрахункової схеми було проведено порівняння результатів із даними, отриманими в іншому програмному комплексі. Було встановлено хорошу узгодженість результатів, зокрема щодо розподілу нормальних напружень при різних рівнях навантаження.

У висновку слід зазначити, що класичні підходи МСЕ, засновані на поліноміальній апроксимації переміщень, характеризуються повільною збіжністю та не враховують деякі специфічні ефекти, такі як «помилкові зсуви».

Запропонований підхід із використанням модифікованої схеми скінченних елементів дозволяє усунути ці недоліки. Проведений аналіз і чисельні експерименти підтверджують ефективність і точність розробленої моделі, що робить її придатною для впровадження в сучасні автоматизовані системи інженерного аналізу.

Список використаних джерел

1. Moreno-Mateos M. A., Wiesheier S. Biaxial characterization of soft elastomers: experiments and data-driven modeling // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2025. DOI: 10.1016/j.jmps.2025.105678.
2. Li W. et al. Finite element modeling of dielectric elastomers considering nonlinear behavior // *Applied Physics A*. 2024. DOI: 10.1007/s00339-024-07601-9.
3. Lavrik, V., Mezhuyev, V. (2024). Computation of Stress–Strain States in Elastomers Utilizing the Moment Diagram Approach in Finite Element Analysis. In: Sharma, H., Shrivastava, V., Tripathi, A.K., Wang, L. (eds) *Communication and Intelligent Systems. ICCIS 2023. Lecture Notes in Networks and Systems*, vol 967. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-97-2053-8_24. (ISSN 23673370).
4. Lavrik, V., Bohdanov, I., Aliksieieva, H., Antonenko, O., & Ovsyannikov, O. (2025). Development of a procedure for calculating problems in the mechanics of elastomers based on the open modeling language. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(7 (134)), 23–32. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.326219>.