УДК 519.86

А. Д. ШАМРОВСКИЙ, С. В. СОЛОДУХИН

Запорожская государственная инженерная академия

СРАВНЕНИЕ КОНТИНУАЛЬНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОДНОСЕКТОРНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статье рассматриваются перспективы использования континуальных и дискретных моделей при математическом моделирование поведения односекторных экономических систем. Предложено сравнение континуальных и дискретных моделей. Изложены особенности применения данных моделей.

Ключевые слова: *модель, континуальная модели, дискретные модели, дифференциальные уравнения.*

В последние годы накоплен значительный математический аппарат для исследования социально-экономических процессов и объектов. Основу данного аппарата составляют математические модели, описывающие поведение исследуемых объектов. Для решения динамических задач активно используют континуальные математические модели, показавшие хорошие результаты в технических науках. Однако их применение сопряжено со значительными трудностями, связанными со сложностью решения дифференциальных уравнений, описывающих траекторию исследуемой системы. В таких условиях использование дискретных моделей позволяет достаточно адекватно описать поведение экономической системы, причем с учетом различных траекторий развития, связанных с начальными условиями системы. В данной статье рассматривается функционирование односекторной экономической системы, производящей один универсальный продукт, который может, как потребляться, так и инвестироваться. Рынки сбыта работают бесперебойно, производственные факторы (капитал и труд) существенно не понижаются и не повышаются при изменении цен, технология не подвержена никаким изменениям. Основной задачей данной статьи является сравнение континуальных и дискретных моделей для описания поведения односекторных экономических систем.

Результаты и их обсуждение

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение [1], описывающее динамику односекторной экономической системы:

$$(1-a)x = \nu \frac{dx}{dt} + y \qquad (1)$$

Здесь x – валовый продукт; a – производственный коэффициент; ν – коэффициент фондоемкости; y – свободный остаток. Рассмотрим решение этого уравнения при постоянных значениях величин $a,\ \nu,\ y$.

Вначале рассматривается статическое уравнение:

$$(1-a)x = y, \qquad (2)$$

отвечающее постоянному значению x. Отсюда получаем:

$$x^* = \frac{y}{1-a} \qquad (3)$$

Далее переносим начало отсчета на оси x в положение равновесия системы, выполняя замену:

$$x = x^* + z \qquad (4)$$

Учитывая равенство:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dz}{dt}, \tag{5}$$

справедливое при постоянном значении x*, получаем:

$$(1-a)(x^*+z)=(1-a)x^*+(1-a)z=\nu\frac{dz}{dt}+y \tag{6}$$

Отбрасывая слагаемые, сокращающиеся в силу (2), получаем однородное уравнение:

$$kz=\frac{dz}{dt},\quad k=\frac{1-a}{\nu} \tag{7}$$

Решение этого уравнения будет:

$$z=z_0e^{kt}, \tag{8}$$

где z_0 – начальное значение величины z. Подстановка (8) в (4) дает:

$$x=x^*+z_0e^{kt} \tag{9}$$

На рис. 1.а. приведены примеры соответствующих графиков. Мы видим, что положение равновесия является неустойчивым. Любое отклонение от него в дальнейшем нарастает.

Перейдем теперь к дискретной модели, заменив дифференциальное уравнение (1) конечно-разностным:

$$(1-a)x_i=\nu\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}+y_i,\quad \Delta x_i=x_{i+1}-x_i,\quad t_{i+1}=t_i+\Delta t_i,\quad (i=0,1,...) \tag{10}$$

С точки зрения теории дифференциальных уравнений уравнение (10) является приближенным по отношению к уравнению (1). Однако с точки зрения экономики это не так. Реальные экономические процессы являются дискретными. Платежи выполняются конечными суммами Δx_i и через конечные промежутки времени Δt_i. Поэтому здесь, при правильном подборе параметров, точным является как раз уравнение (10).

Уравнение (1) получается путем сглаживания реальных дискретных экономических процессов. Такой подход, связанный со сглаживанием, хорошо известен в классической механике, для решения задач которой и был впервые создан аппарат дифференциальных уравнений. В механике сплошной среды (жидкости, упругого тела) он называется феноменологическим.

Однако скачки в сплошных средах, изучаемых механикой, зачастую очень малы, а количество этих скачков очень велико; поэтому их сглаживание в механике в большинстве случаев оправдано. Однако далеко не всегда оправдан автоматический перенос математического аппарата механики в экономические задачи, поскольку здесь дискретность изучаемых процессов выражена гораздо сильнее, чем в механике.

Существует точка зрения, что применение математического аппарата дифференциальных уравнений в экономике целесообразно в силу того, что дискретные модели создаются только для численной реализации на компьютерах, а дифференциальные уравнения позволяют, в ряде случаев, получать аналитические решения. Однако, во-первых, аналитические решения дифференциальных уравнений удается получить только в сравнительно небольшом количестве случаев и для относительно простых задач. Во-вторых, дискретные уравнения также позволяют получать аналитические решения примерно в тех же случаях, что и аналогичные дифференциальные уравнения.

Продемонстрируем это на примере уравнения (10). Вновь находим состояние равновесия системы по формуле (3) и выполняем замену (4). В результате получаем следующее уравнение:

$$\Delta z_i = z_{i+1} - z_i = kz_i\Delta t_i \quad (i = 0,1,\ldots) \tag{11}$$

Отсюда:

$$z_{t+1} = m_i z_t, \quad m_i = 1 + k\Delta t_i \quad (i = 0,1,\ldots) \tag{12}$$

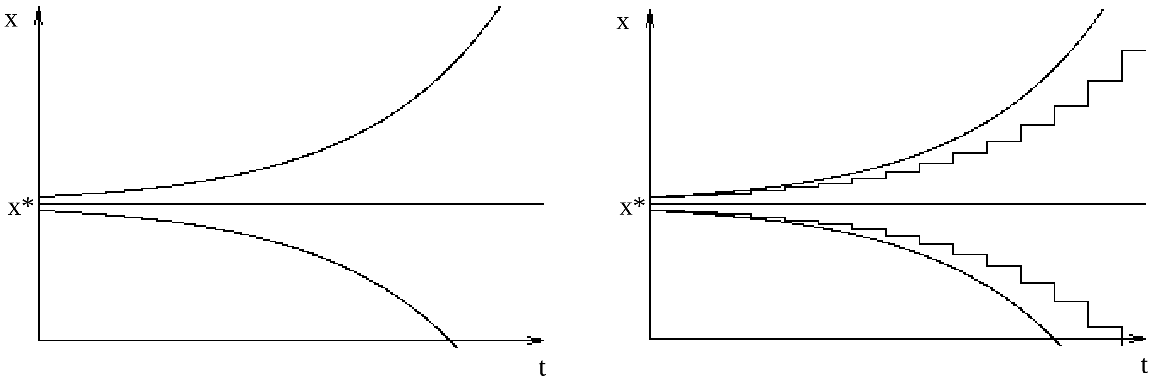
Мы видим, что при постоянном шаге по времени $\Delta t_i = \Delta t = \text{const}$ величина z_t изменяется по закону геометрической прогрессии со знаменателем $m_i = m = 1 + k\Delta t = \text{const}$. В результате получаем:

$$z_i = z_0 m^i \quad (i = 0,1,\ldots) \tag{13}$$

Из (4) имеем:

$$x_i = x^* + z_0 m^i, \quad t_i = i\Delta t \quad (i = 0,1,\ldots) \tag{14}$$

Таким образом, в дискретном случае также получено аналитическое решение. Соответствующий ступенчатый график приведен на рис. 1.б.



а *б*

Рис. 1. **Траектории поведения системы**

На этом же графике приведены и прежние результаты, полученные при помощи решения дифференциального уравнения (1). Сравним результаты, полученные двумя методами. С классических позиций численного интегрирования дифференциальных уравнений мы использовали, в дискретном варианте, так называемый метод Эйлера, который отличается сравнительно низкой точностью и быстрым накоплением погрешности.

Мы видим, что ступенчатые графики, отвечающие этому методу, быстро удаляются от гладких кривых, полученных при помощи точного решения дифференциального уравнения.

Однако при оценке тех же результатов с позиций решаемой экономической задачи мы приходим к противоположным выводам. Ступенчатые графики отвечают реальному экономическому процессу, который является дискретным по своей природе. В этом смысле они являются точными. Гладкие же графики получены в результате процедуры сглаживания реального дискретного процесса и дают, в итоге, приближенные результаты.

Чем больше шаг изменения времени Δt, тем больше отличаются идеализированные континуальные результаты от точных дискретных результатов. Экономические процессы, зачастую, протекают нелинейно. Линейные уравнения (1) и (10) допускают модернизацию с целью описания нелинейных экономических явлений. Некоторые нелинейные обобщения динамических уравнений Леонтьева изложены в [3,4]. Выполним в (1) следующие замены:

$$ax \to a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad y \to b_0 + b_1 x + b_2 x^2, \tag{15}$$

получая:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu}\left[(a_0 + b_0) + (1 - a_1 - b_1)x - (a_2 + b_2)x^2\right] \tag{16}$$

Нелинейные слагаемые в правой части уравнения (16) могут отвечать наличию каких-то экономических условий, ограничивающих рост валового продукта x, например, насыщению рынка сбыта, прогрессивному налогообложению и т.д.

Найдем состояния равновесия системы, отвечающее условию $x = const$, решая статическое уравнение:

$$(a_2 + b_2)x^2 - (1 - a_1 - b_1)x + a_0 + b_0 = 0 \tag{17}$$

Это квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{1 - a_1 - b_1 \pm \sqrt{(1 - a_1 - b_1)^2 - 4(a_2 + b_2)(a_0 + b_0)}}{2(a_2 + b_2)} \tag{18}$$

Если корни действительны, то мы имеем два различных состояния равновесия. На рис. 2.а. приведен график зависимости $x = x(t)$, полученный при помощи решения уравнения (16) численным методом Рунге-Кутта и отвечающий эволюции системы от меньшего значения x_1. к большему значению x_2. Мы получили классическую S-образную логистическую кривую Ферхюльста.

Перейдем к дискретной модели, заменяя дифференциальное уравнение (16) на конечно-разностное:

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = \frac{1}{\nu}\left[(a_0 + b_0) + (1 - a_1 - b_1)x_i - (a_2 + b_2)x_i^2\right] \tag{19}$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t_i \quad (i = 0,1,\ldots)$$

При постоянном шаге по времени $\Delta t_i = \Delta t = const$ имеем:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{\nu}\left[(a_0 + b_0) + (1 - a_1 - b_1)x_i - (a_0 + b_0)x_i^2\right] \tag{20}$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (i = 0,1,\ldots)$$

При таких же условиях, как в континуальном случае, получаем результаты, изображенные графически на рис. 2., *б*. Мы вновь видим количественное отличие дискретных результатов от континуальных при наличии качественного подобия.

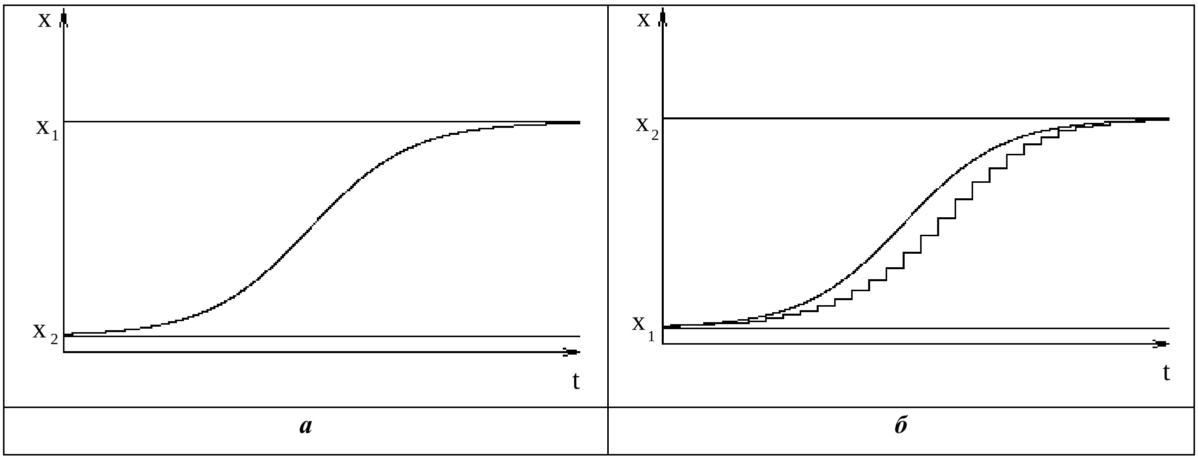


Рис. 2. **График эволюции системы x=x(t)**

Роль коэффициента рождаемости в экономике играет величина, обратная коэффициенту фондоемкости. Чем меньше коэффициент фондоемкости, тем быстрее растет величина валового продукта x. При этом в континуальном случае не возникает никаких принципиально новых эффектов. Логистическая кривая более быстро переходит от значения x_1 к значению x_2, сохраняя свой качественный характер.

Иначе обстоит дело в дискретном случае. На приведенных рисунках изображен ряд графиков, соответствующих постепенному убыванию коэффициента фондоемкости. Вначале мы имеем привычную логистическую кривую в дискретном варианте.

Однако при дальнейшем уменьшении ν характер ломаной качественно изменяется (рис. 3., *а*). Она начинает совершать колебания вблизи положения равновесия x_2 (рис. 3., *б*). Вначале эти колебания носят затухающий характер. При дальнейшем уменьшении ν колебания начинают происходить между двумя постоянными значениями x (рис. 3., *в*).

Далее величина x начинает колебаться между четырьмя постоянными значениями; далее между восемью, шестнадцатью и т.д. При достижении достаточно малого значения коэффициента фондоемкости колебания x приобретают хаотический характер (рис. 3., *г*.).

Все эти результаты качественно полностью соответствуют результатам, приведенным в [2].

Обратим внимание еще на одну деталь.

В современной науке достаточно большой популярностью пользуется так называемая теория катастроф. Под катастрофой понимают достаточно большое скачкообразное изменение некоторой функции при малом изменении аргумента.

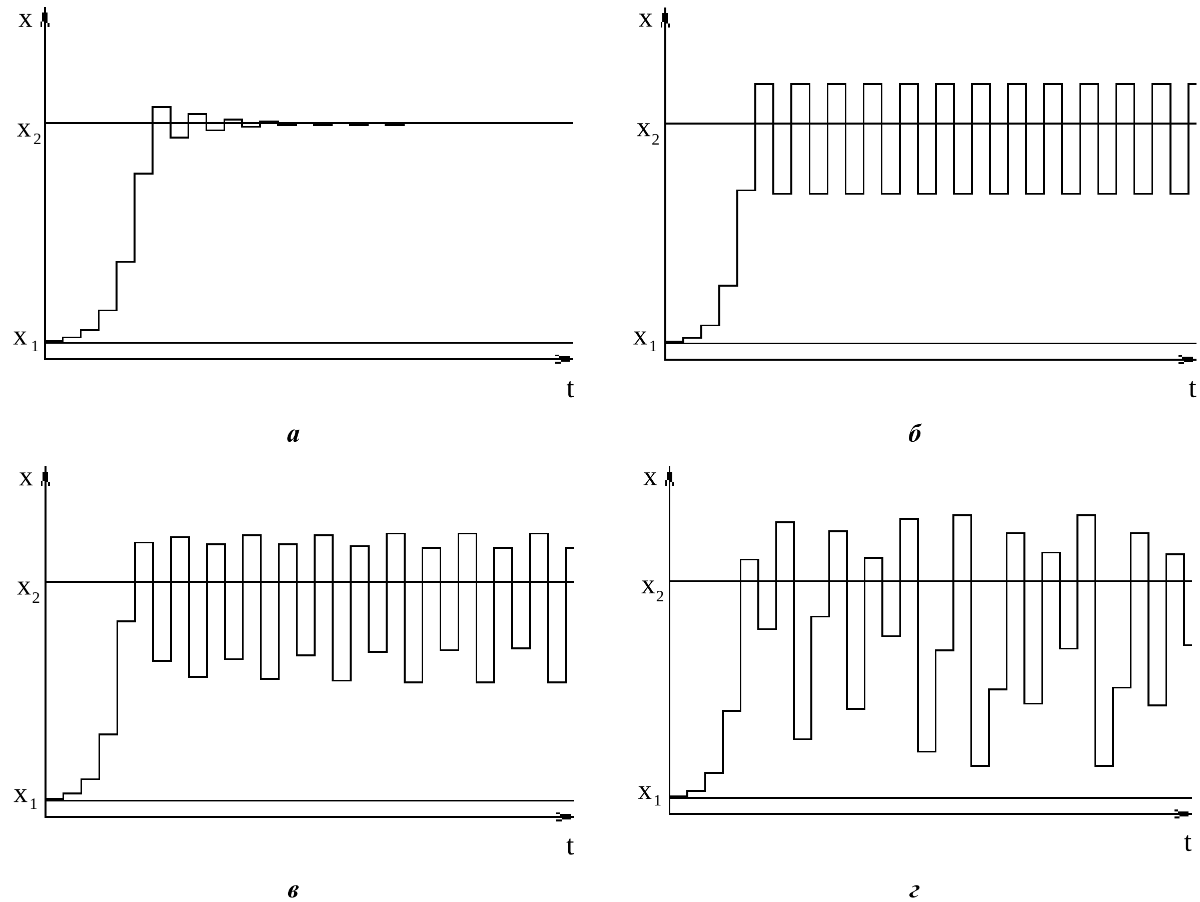


Рис. 3. **Динамика валового выпуска на основе различных значений коэффициента фондоемкости**

С этой точки зрения процессы, изображенные графически на рис. *3.а.г.* можно воспринимать как последовательности катастроф.

Континуальная математика изучает катастрофы при помощи достаточно сложного аппарата. В дискретной математике катастрофы можно описать при помощи простейших детерминированных моделей.

Выводы

В линейном случае различия в результатах, полученных при помощи континуальных и дискретных моделей, являются только количественными. Качественно результаты совпадают. Принципиальное отличие появляется в нелинейных случаях.

На примере экономической задачи показано, что дискретная модель приводит к результатам, качественно схожим с результатами на основе континуальной модели, только в случае относительно плавного развития экономической системы.

Континуальная модель всегда дает плавно изменяющееся решение. В то же время в рамках дискретной модели удается изучить скачкообразные изменения, отвечающие реальным экономическим явлениям. Сами по себе колебательные и скачкообразные процессы не редкость в экономике.

Однако их изучение при помощи математического аппарата дифференциальных уравнений весьма затруднительно. Обычно приходится использовать изменение параметров дифференциальных уравнений с использованием каких-либо случайных процессов. В то же время дискретный подход позволяет получить такие результаты просто и естественно. При этом модель остается детерминированной.

Иначе говоря, результат очередного скачка однозначно определяется состоянием системы на предыдущем шаге. Это позволяет использовать дискретные модели для прогнозирования процессов, которые внешне выглядят случайными, но на самом деле таковыми не являются.

Список использованной литературы

1. Пономаренко О.І., Пономаренко В.О. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі. Київ, «ЛИБІДЬ», 1995. –239 с.

2. Пайтген Х.–О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. Москва, «Мир», 1993. –176 с.

3. Шамровський О.Д., Комп'ютерне моделювання економічних задач. Запоріжжя, ЗДІА, 2006. –150 с.

4. Базылев Б.Ю., Саенко Е.Р., Шамровский А.Д. Нелинейные обобщения динамических уравнений Леонтьева для двухсекторной экономики. Радіоелектроніка, Інформатика, Управління. 1(3). Запоріжжя, 2000.

Стаття надійшла до редакції 17.10.2012

Порівняння континуальних і дискретних моделей для односекторних економічних систем

Шамровський А. Д., Солодухін С.В.
Запорізька державна інженерна академія

У статті розглядаються перспективи використання континуальних та дискретних моделей при математичному моделювання поведінки односекторних економічних систем. Запропоновано порівняння континуальних та дискретних моделей. Викладено особливості застосування даних моделей.

Ключові слова: модель, континуальні моделі, дискретні моделі, диференційні рівняння.

Comparison of continuous and discrete models for one sector economic systems

Shamrovsky A., Solodukhin S.
Zaporizhzhya State Engineering Academy

The article is devoted the prospects of continual and discrete models for mathematical modeling of behavior odnosektornyh economies. Invited comparison of continuous and discrete models. Features of the application of these models.

Keywords: model, continuum models, discrete models, differential equations.