УДК 519.863:338.3

Ю.П. ТАДЕЄВ

Київський національний університет ім.. Тараса Шевченка

МАГІСТРАЛЬНА ТРАЄКТОРІЯ ДИНАМІЧНОГО МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ З ЛІНІЙНО-ОДНОРІДНИМИ ФУНКЦІЯМИ ПРОМІЖНИХ ВИТРАТ ТА КАПІТАЛОЄМНОСТІ ПРОДУКЦІЇ

Для нелінійної динамічної моделі Леонтьєва «витрати-випуск» побудована двоїста модель цін, а також знайдена магістральна траєкторія, що є траєкторією рівноважного експоненціального зростання випуску продукції.

***Ключові слова**: економіко-математична модель, модель «витрати-випуск», нелінійний міжгалузевий баланс, пряма та двоїста моделі, динамічний міжгалузевий баланс, магістральна траєкторія.*

Міжгалузева модель Леонтьєва «витрати-випуск» успішно використовується для розв'язання багатьох макроекономічних задач. Дана модель стала фундаментом, так званої, «лінійної економіки», в якій всі процеси та явища розглядаються як чисто пропорційні, тобто лінійні [1]. Зазначимо, що за створення саме цього наукового напряму та його важливість при вирішенні економічних проблем В. Леонтьєв у 1973 році отримав Нобелівську премію з економіки.

Найпростіша статична модель Леонтьєва «витрати-випуск» має вигляд:

$$x = Ax + y,\ \ y > 0,\ \ x \ge 0, \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор повного випуску, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ – вектор кінцевого випуску, $A = (a_{ij})_1^n \ge 0$ – технологічна матриця коефіцієнтів прямих витрат.

Більш точна постановка моделі «витрати-випуск» вимагає врахування нелінійної залежності прямих проміжних витрат $A(x)$ від вектора повного випуску. При цьому ця не лінійність є специфічною, оскільки вона повинна відображати реалістичний процес тиражування уніфікованих виробництв. Математично це означає, що вектор-функція проміжних витрат $A(x)$ є лінійно-однорідною, тобто

$$A(\alpha x) = \alpha A(x),\ \ \alpha > 0. \tag{2}$$

Тому для випадку задачі нелінійного статичного міжгалузевого балансу

$$x = A(x) + y,\ \ y > 0,\ \ x \ge 0, \tag{3}$$

справджуються наступні гіпотези:

1) $A(x)$ – двічі неперервно диференційована функція, причому $A(x) \ge 0$ та $A(x)$ перетворюється в нуль, лише при $x = 0$;
2) $A'(x) > 0$ (маргінальні витрати є строго додатними);
3) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$, $\alpha > 0$ (лінійна однорідність);
4) виконується умова Ліпшиця: $\|A(x) - A(z)\| \le q\|x - z\|$, де $q < 1$ при $x, z \ge 0$.

У випадку задачі нелінійного динамічного міжгалузевого балансу

$$\begin{aligned} &x(t) = A(x(t)) + B(\dot{x}(t)) + c(t), \\ &c(t) > 0,\ x(t) \ge 0,\ \dot{x}(t) \ge 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

де t – неперервний час, $0 \le t < \infty$, $\dot{x}(t)$ – похідна за часом, $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), ..., \dot{x}_n(t))$ – вектор приростів потужностей, для вектор-функції $B(\dot{x}(t))$ також будемо вважати, що виконується зазначені чотири гіпотези, тобто:

1) $B(\dot{x})$ – двічі неперервно диференційована функція, причому $B(\dot{x}) \ge 0$ та $B(\dot{x})$ перетворюється в нуль, лише при $\dot{x} = 0$;
2) $B'(\dot{x}) > 0$;
3) $B(\alpha\dot{x}) = \alpha B(\dot{x})$, $\alpha > 0$;
4) $\|B(\dot{x}) - B(\dot{z})\| \le q_1 \|\dot{x} - \dot{z}\|$, де $q_1 > 0$ при $\dot{x}, \dot{z} \ge 0$.

Зазначимо, що під нормою вектора $x \ge 0$ ми розуміємо наступне $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Постановка завдання

У роботі ставляться та розв'язуються наступні завдання:

а) для моделі статичного міжгалузевого балансу (3) знайти умови існування єдиного розв'язку x^*, а також побудувати двоїсту модель цін та одержати умови існування єдиного розв'язку для цін p^*;

б) для моделі динамічного міжгалузевого балансу (4) побудувати магістральну траєкторію як траєкторію рівноважного експоненціального зростання, а також побудувати двоїсту модель цін.

Результати та їх обговорення

Виділимо п'ять основних результатів дослідження.

1**.** Для статичної моделі нелінійного міжгалузевого балансу задіємо такий ітераційний процес [2]:

$$x^{k+1} = A(x^k) + y,\ k = 0,1,2,...;\ x^0 = 0. \qquad (5)$$

Для лінійно-однорідної диференційованої вектор-функції $A(x)$ виконується теорема Ейлера [3], яка в нашому випадку набуде вигляду

$$A(x) = A'(x)x, \qquad (6)$$

де $A'(x)$ – матриця частинних похідних $\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)_1^n > 0$.

Покажемо, що ітераційний процес (5) породжує монотонно зростаючу послідовність. Маємо

$$x^1 = A(x^0) + y = A(0) + y = y > 0 = x^0.$$

Нехай $x^k > x^{k-1} > 0$. Тоді завдяки лінійній однорідності матимемо

$$x^{k+1} = A(x^k) + y > A(x^{k-1}) + y = x^k > 0.$$

Отже, $0 = x^0 < x^1 < ... < x^{k-1} < x^k < x^{k+1} < ...$ – монотонно зростаюча послідовність. Вона є обмеженою зверху, оскільки

$$\left\|x^{k+1}-x^{k}\right\|=\left\|A\;\;x^{k}\;\;-A\;\;x^{k-1}\;\;\right\|\leq q\left\|x^{k}-x^{k-1}\right\|,$$

$$\left\|x^{k+1}\right\|=\left\|x^{k+1}-x^{0}\right\|\leq\left\|x^{k+1}-x^{k}\right\|+\left\|x^{k}-x^{k-1}\right\|+...+\left\|x^{1}-x^{0}\right\|\leq\frac{1-q^{k+1}}{1-q}\left\|x^{1}\right\|=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}\left\|y\right\|<\frac{1}{1-q}\left\|y\right\|.$$

Тоді існує $\lim\limits_{k\to\infty}x^{k}=x^{*}$. При цьому $x^{*}=A\;\;x^{*}\;\;+y$, $x^{*}>0$. Таким чином, існування і єдиність розв’язку нелінійного статичного міжгалузевого балансу (3) доведено.

2. Перейдемо тапер до побудови двоїстої моделі для прямої моделі (3). Нехай $p=\;\;p_{1},p_{2},...,p_{n}$ – вектор цін для продукції. На основі моделі обсягів виробництва (3) складемо вартісний баланс

$$px=pA\;\;x\;\;+py\,. \tag{7}$$

Нехай вектор доданої вартості характеризується коефіцієнтом доданої вартості продукції $r=\;\;r_{1},r_{2},...,r_{n}\;\;>0$.

Основна статична гіпотеза міжгалузевого балансу стверджує, що

$$py=rx\,, \tag{8}$$

тобто новостворена вартість py дорівняє доданій вартості rx (баланс грошей).

Враховуючи (6) та (8), баланс (7) перепишеться у вигляді

$$px=pA'(x)x+rx$$

або

$$p-pA'\;\;x\;\;-r\;\;x=0\,.$$

Останнє співвідношення повинно справджуватись в точці $x^{*}>0$. Це можливо, коли

$$p=pA'\;\;x^{*}\;\;+r,\;\;r>0,\;\;p\geq 0\,, \tag{9}$$

що і є двоїстою моделлю цін для балансу продукції (3).

Таким чином, система

$$\begin{aligned}&x=A\;\;x\;\;+y,\;\;y>0,\;\;x\geq 0,\\&p=pA'\;\;x\;\;+r,r>0,\;\;p\geq 0\end{aligned} \tag{10}$$

є парою прямої та двоїстої задач для випадку нелінійного статичного міжгалузевого балансу з лінійно-однорідною функцією проміжних витрат.

Специфіка системи (10) полягає в тому, що спочатку розв’язується баланс продукції (3), а потім розв’язується баланс цін (3). При цьому класична вимога продуктивності моделі (3) полягає у вимозі продуктивності матриці $A'\;\;x\;\;>0$, що випливає з гіпотези 4) – умови Ліпшиця для диференційованої лінійно-однорідної функції $A\;\;x$.

3. Розглянемо тепер задачу нелінійного динамічного балансу (4), для якої виконуються чотири вищезазначені гіпотези відносно лінійно-однорідних вектор-функцій проміжних витрат $A\;x$ та капіталоємності продукції $B\;\;\dot{x}$.

Для диференціального рівняння (4) спочатку розглянемо випадок однорідного рівняння, коли $c(t)=0$ і знайдемо загальний розв'язок. Цей розв'язок, згідно з теорією диференціальних рівнянь, шукатимемо у вигляді експоненти в часі, а саме

$$x(t)=x_0e^{\lambda t} \tag{11}$$

де $x_0>0$ – довільний вектор.

Тоді одержуємо

$$x_0e^{\lambda t}=A\left(x_0e^{\lambda t}\right)+B\left(\lambda x_0e^{\lambda t}\right),$$

Звідки, після спрощення будемо мати

$$x_0=A(x_0)+\lambda B(x_0). \tag{12}$$

Враховуючи лінійну однорідність вектор-функції $A(x_0)$ та $B(x_0)$ з (12) одержуємо

$$\left(I-A'(x_0)\right)x_0=\lambda B'(x_0)x_0, \tag{13}$$

де I – одинична матриця.

Оскільки матриця $A'(x_0)$ продуктивна, то

$$\left(I-A'(x_0)\right)^{-1}\geq 0. \tag{14}$$

Після множення обох частин рівності (13) на невід'ємну матрицю (14) одержуємо

$$x_0=\lambda\left(I-A'(x_0)\right)^{-1}B'(x_0)x_0. \tag{15}$$

Очевидно, що $\lambda\neq 0$. Тоді рівність (15) перепишеться у вигляді

$$\left[\left(I-A'(x_0)\right)^{-1}B'(x_0)-\lambda^{-1}I\right]x_0=0. \tag{16}$$

Задача (16) – це нелінійна задача про власні числа ($\mu=\lambda^{-1}$) для невід'ємної матриці

$$\left(I-A'(x_0)\right)^{-1}B'(x_0)\geq 0. \tag{17}$$

Згідно з загальною теорією про неперервну залежність від параметрів власних чисел матриць, що є неперервними функціями цих параметрів [3], задача на власні числа (16) має розв'язок. Для неї залишається властивість про існування найбільшого додатнього власного числа $\mu^*>0$ (кореня Фробеніуса для невід'ємної матриці), для якого відповідний власний вектор має невід'ємні компоненти $x^*\geq 0$. Для нерозкладної матриці цей власний вектор строго додатний. В подальшому матрицю (17) будемо вважати нерозкладною, і тоді $x^*>0$.

Таким чином, магістральна траєкторія $x(t)$ однорідного диференціального рівняння (4) при $c(t)\equiv 0$ як траєкторія збалансованого експоненціального зростання має вигляд

$$x(t)=x_0^*e^{\lambda^* t},\ \lambda^*=\left(\mu^*\right)^{-1}. \tag{18}$$

4. Розглянемо тепер випадок, коли в диференціальному рівнянні (4) споживання $c(t)>0$. Є різні програми споживання в часі, але найбільш цікавим є випадок експоненціального зростання споживання, коли

$$c(t)=c_0e^{\nu t},\ c_0>0,\ \nu\geq 0. \tag{19}$$

Згідно з теорією лінійних диференціальних рівнянь частинний розв'язок неоднорідного рівняння (4) шукаємо у такому ж вигляді як представлена залежність $c(t)$. Тобто, частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x(t) = \bar{x}_0 e^{\nu t}, \ \bar{x}_0 > 0. \tag{20}$$

Після підстановки виразів (19) і (20) в рівняння (4) одержимо

$$\bar{x}_0 = A(\bar{x}_0) + \nu B(\bar{x}_0) + c_0, \tag{21}$$

або

$$\bar{x}_0 = A'(\bar{x}_0)\bar{x}_0 + \nu B'(\bar{x}_0)\bar{x}_0 + c_0. \tag{22}$$

Після множення співвідношення (22) на невід'ємну матрицю (14) одержимо

$$\left[I - \nu(I - A'(\bar{x}_0))^{-1} B'(\bar{x}_0)\right]\bar{x}_0 = (I - A'(\bar{x}_0))^{-1} c_0. \tag{23}$$

Щоб рівняння (23) мало розв'язок $\bar{x}_0 > 0$ необхідно і достатньо, щоб матриця

$$\nu(I - A'(\bar{x}_0))^{-1} B'(\bar{x}_0) \geq 0 \tag{24}$$

була продуктивною. Тоді матриця

$$\left[I - \nu(I - A'(\bar{x}_0))^{-1} B'(\bar{x}_0)\right]^{-1} \geq 0, \tag{25}$$

тобто існує та є невід'ємною.

Продуктивність матриці (24) забезпечується при $\nu < \lambda^*$, де $\mu^* = (\lambda^*)^{-1}$ – корінь Фробеніуса матриці (17) [3]. В цьому випадку

$$\bar{x}_0 = \left[I - \nu(I - A'(\bar{x}_0))^{-1} B'(\bar{x}_0)\right]^{-1} (I - A'(\bar{x}_0))^{-1} c_0 = \left[I - A'(\bar{x}_0) - \nu B'(\bar{x}_0)\right] c_0. \tag{26}$$

Таким чином, магістральна траєкторія нелінійної динамічної міжгалузевої моделі (4) як траєкторія максимального експоненціального зростання існує при $\nu < \lambda^*$ і визначається рівністю (18).

Звернемо ще увагу на те, що розв'язати нелінійну систему (21) зручно за допомогою такого ітераційного процесу

$$\bar{x}_0^{(k+1)} = A(\bar{x}_0^{(k)}) + \nu B(\bar{x}_0^{(k)}) + c_0, \ k = 0,1,2,..., \ \bar{x}_0^{(0)} = 0. \tag{27}$$

Тоді процес (27) утворює монотонно зростаючу послідовність, збіжність якої гарантується при

$$q + \nu q_1 = q_0 < 1. \tag{28}$$

5. Перейдемо до питання про двоїсту модель цін до нелінійної міжгалузевої моделі обсягів продукції (4).

Нехай $p(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)) > 0$ – вектор-функція цін на продукцію.

Помножимо співвідношення (4) на вектор цін $p(t)$. Одержимо динамічний вартісний баланс

$$p(t)x(t) = p(t)A(x(t)) + p(t)B(\dot{x}(t)) + p(t)c(t). \tag{29}$$

Введемо вектор динамічних коефіцієнтів доданої вартості $r(t) = (r_1(t), r_2(t), ..., r_n(t)) > 0$.

Приймемо дві гіпотези. Перша гіпотеза стосується миттєвої рівності доданої вартості новоствореній вартості (миттєвий баланс грошей):

$$p(t)c(t) = r(t)x(t)\,. \tag{30}$$

Друга гіпотеза формально має вигляд

$$p(t)B(\dot{x}(t)) = \dot{p}(t)B(x(t))\,, \tag{31}$$

що означає, що витрати на створення нових потужностей компенсуються за рахунок інфляції (динамічний баланс грошей). Вперше подібна гіпотеза, але для лінійного динамічного міжгалузевого балансу була запропонована в роботі [4]. Ми узагальнюємо динамічну гіпотезу на нелінійний випадок.

З врахуванням співвідношень (30) та (31) динамічний вартісний баланс (29) запишеться у вигляді

$$p(t)x(t) = p(t)A(x(t)) + \dot{p}(t)B(x(t)) + r(t)x(t)$$

або

$$p(t)x(t) = p(t)A'(x(t))x(t) + \dot{p}(t)B'(x(t))x(t) + r(t)x(t)\,.$$

Останнє співвідношення перепишемо у вигляді

$$\left[p(t) - p(t)A'(x(t)) - \dot{p}(t)B'(x(t)) - r(t)\right]x(t) = 0 \tag{32}$$

Співвідношення (32) повинно виконуватись на розв'язку $x^*(t) > 0$ динамічного балансу (4). Це можливо, коли

$$p(t) = p(t)A'(x^*(t)) + \dot{p}(t)B'(x^*(t)) + r(t)\,,\ r(t) > 0,\ p(t) \geq 0\,. \tag{33}$$

Співвідношення (33) і є двоїстою моделлю цін для прямої моделі обсягів виробництва (4).

Таким чином, система

$$\begin{aligned} &x(t) = A(x(t)) + B(\dot{x}(t)) + c(t)\,,\ c(t) > 0,\ x(t) \geq 0, \\ &p(t) = p(t)A'(x^*(t)) + \dot{p}(t)B'(x^*(t)) + r(t)\,,\ r(t) > 0,\ p(t) \geq 0 \end{aligned} \tag{34}$$

є парою прямої та двоїстої задач для нелінійного динамічного міжгалузевого балансу з лінійно-однорідними функціями проміжних витрат та капіталоємності продукції.

Специфікою системи (34) є те, що спочатку знаходиться розв'язок $x^*(t)$ нелінійної задачі (першого рівняння системи), а потім розв'язується лінійна задача (друге рівняння системи).

Висновки

В роботі запропонована статична модель нелінійного міжгалузевого балансу з лінійно-однорідною функцією проміжних витрат продукції. Досліджені умови існування єдиного розв'язку та запропонований алгоритм його знаходження. Побудована відповідна двоїста модель цін.

В роботі також запропонована динамічна модель нелінійного міжгалузевого балансу з лінійно-однорідними функціями проміжних витрат та капіталоємності продукції. Для даної моделі побудована магістральна траєкторія як траєкторія збалансованого експоненціального зростання. Побудована динамічна двоїста модель цін, для якої актуальним завданням залишається побудова відповідної магістральної траєкторії.

Список використаної літератури

1. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев: [пер. с англ.] – М.: ОАО «Издательство «Экономика», 1997. – 479 с.

2. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку: [монографія] / І.М. Ляшенко. – К.: Вища школа, 1999. – 236 с.

3. Пономаренко О.І. Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 2. Макроекономіка: [навч. посібник] / О.І Пономаренко, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – К.: Вища школа, 2004. – 207 с.

4. Ляшенко І.М. Економічні гіпотези та динаміка рівноважних цін в моделі Леонтьєва «витрати-випуск» / І.М. Ляшенко, О.І. Ляшенко, А.М. Онищенко // Економічна кібернетика. – №3–4(57–58). – 2009. – с. 14–18.

Стаття надійшла до редакції 18.10.2012

Магистральная траектория динамического межотраслевого баланса с линейно-однородными функциями промежуточных затрат и капиталоемкости продукции

Тадеев Ю.П.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Для нелинейной динамической модели Леонтьева «затраты-выпуск» построена двойственная модель цен, а также найдена магистральная траектория, которая является траекторией экспоненциального роста выпуска продукции.

Ключевые слова: экономико-математическая модель, модель «затраты-выпуск», нелинейный межотраслевой баланс, прямая и двойственная модели, динамический межотраслевой баланс, магистральная траектория.

Turnpike of dynamic input-output balance with linearly homogeneous functions of overhead costs and capital coefficients

Tadeyev Y.
Taras Shevchenko National University of Kyiv

The dual price model and turnpike of exponential growth for nonlinear dynamic input-output Leontief model are constructed in the article.

Keywords: economic-mathematical model, input-output model, nonlinear input-output balance, primal and dual model, dynamic input-output balance, turnpike.