ДИСКРЕТНІ СТРУКТУРИ: МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА, МНОЖИНИ ТА КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕХНОЛОГІЙ
ТА ДИЗАЙНУ
КАФЕДРА КОМП’ЮТЕРНИХ НАУК

ДИСКРЕТНІ СТРУКТУРИ: МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА, МНОЖИНИ ТА КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою Київського національного університету технологій та дизайну
для студентів усіх форм навчання спеціальності «Комп’ютерні науки»

Київ
КНУТД
2024

УДК 519.1 (075.8)

Д 48

Рекомендовано Вченою радою Київського національного університету технологій та дизайну для студентів усіх форм навчання спеціальності «Комп'ютерні науки»
25.09.2024 р. Протокол № 2

Авторський колектив

ЧУПРИНКА В.І. – д.т.н., професор, професор кафедри Комп'ютерних наук Київського національного університету технологій та дизайну

ДЕМКІВСКИЙ Є.О. – к.т.н., доцент, доцент кафедри Інформаційних систем факультету Комп'ютерних наук і кібернетики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка

ЧУПРИНКА Н.В. – к.т.н., доцент, завідувач кафедри Комп'ютерних наук Київського національного університету технологій та дизайну

ДЕМКІВСЬКА Т.І. - к.т.н., доцент, доцент кафедри Комп'ютерних наук Київського національного університету технологій та дизайну

Рецензенти:

1. *ОПАНАСЕНКО В.М.* - Провідний науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, доктор технічних наук, професор
2. *БІДЮК П.І.* - Доктор технічних наук, професор, професор кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ІПСА»
3. *МАТВІЄНКО В.Т.* Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Чупринка В.І.

Дискретні структури: Математична логіка, множини та комбінаторний аналіз : навч. посіб. / Є.О. Демківський, Н.В. Чупринка, Т.І. Демківська. – К. : КНУТД, 2024. – 92 с.

Навчальний посібник «**Дискретні структури: Математична логіка, множини та комбінаторний аналіз**» націлений на формування у студентів базового комплексу знань спеціальності 122 Комп'ютерні науки та орієнтований на студентів підготовки ступеня бакалавра.

Особлива увага приділяється таким аспектам, як математична логіка, теорія множин та комбінаторний аналіз. Посібник допомагає студентам розвинути критичне мислення та аналітичні навички, що необхідні для розв'язання складних задач.

Матеріал представлено відповідно до навчальної програми дисципліни і включає теоретичні відомості, аудиторні та домашні завдання, а також запитання та завдання для самостійної роботи. Додатково надано посилання на відеолекції, спрямовані на полегшення засвоєння навчального матеріалу Посібник може використовуватися викладачами та студентами напрямку комп'ютерні науки.

Зміст

Вступ 6

Тема 1. Висловлювання та логічні операції 7

1.1. Висловлювання 7

1.2. Просте висловлювання 8

1.4. Логічні операції 9

1.5. Пріоритет логічних операцій (за зростанням пріоритету) 11

1.6. Логіка першого порядку. Предикат. Квантори загальності і існування 11

1.7. Операції над предикатами 13

Аудиторне завдання 13

Домашнє завдання 14

Завдання для самостійної роботи 16

Контрольні запитання та завдання до теми 1 16

Посилання на відео лекції за темою № 1 16

Тема 2. Множини, операції над множинами 17

2.1. Історична довідка 17

2.2. Визначення множини, елемента множини, включення множин 18

2.3. Способи задання множин 18

2.5. Відношення між множинами. Діаграми Ейлера-Венна 19

2.6. Операції над множинами 21

Аудиторне заняття 22

Домашнє завдання 23

Завдання для самостійної роботи 24

Контрольні запитання до теми 2 24

Посилання на відео лекції за темою № 2 24

Тема 3. Властивості операцій над множинами 25

3.1. Основні теоретико-множинні тотожності 25

3.2. Визначення декартового добутку 33

3.3. Проекція множини 34

3.4. Властивості операцій декартового добутку множин 35

Аудиторне завдання 36

Домашнє завдання 37
Завдання для самостійної роботи 38
Контрольні запитання до теми 3 38
Посилання на відео лекції за темою № 3 38
Тема 4. Бінарні відношення та операції над ними 39
4.1. Визначення відношення та його арність 39
4.2. Область визначення та область значень відношення 44
4.3. Операції над відношеннями 44
4.4. Обернене відношення 45
4.5. Композиція відношень 45
4.6. Властивості відношень 46
Аудиторне завдання 50
Домашнє завдання 52
Завдання для самостійної роботи 53
Контрольні запитання до теми 4 54
Посилання на відео лекції за темою № 4 54
Тема 5. Спеціальні класи бінарних відношень. Функції 54
5.1. Відношення порядку 54
5.2. Відношення еквівалентності 57
5.3. Класи еквівалентності 59
5.3. Розбиття 60
5.4. Функції 60
5.5. Образи та прообрази 61
5.7. Композиція функцій 63
5.8. Класифікація відображень. Властивості функцій 63
5.8. Обернене відображення (обернена функція) 64
Аудиторне завдання 64
Домашнє завдання 65
Завдання для самостійної роботи 67
Контрольні запитання до теми 5 67
Посилання на відео лекції за темою № 5 67
Тема 6. Комбінаторний аналіз 68

6.1. Історична довідка ... 68
6.2. Правила суми та добутку ... 69
6.4. Розміщення, перестановки та комбінації без повторень ... 72
6.5. Розміщення, перестановки та комбінації з повтореннями ... 79
6.6. Формула включень-виключень (ФВВ) ... 86
6.7. Рекурентні співвідношення ... 87
Аудиторне завдання ... 90
Домашнє завдання ... 91
Завдання для самостійної роботи ... 92
Контрольні запитання до теми 6 ... 92
Посилання на відео лекції за темою № 6 ... 92
Рекомендована література ... 93

Вступ

Дискретна математика вважається однією з ключових складових сучасного математичного аналізу. З одного боку вона включає в себе фундаментальні основи математики – теорію множин, математичну логіку, теорію алгоритмів, з іншого є основним математичним апаратом інформатики та обчислювальної техніки. Чим же відрізняється дискретна математика від звичайної (континуальної математики)? Основних рис – дві: перше – це назва ДИСКРЕТНА, що це таке?

Не дивлячись на те, що це слово вживається доволі часто точного визначення цього слова ви не знайдете в підручниках. Дискретна множина – це деяка сукупність об'єктів, якщо якась міра відмінності між ними, наприклад, відстань або деякі інші властивості, для будь-яких двох елементів не менша деякої заданої величини, або по іншому, скажем в термінах матаналізу, що відстань між об'єктами не може бути скільки завгодно малою.

Значить на відміну від традиційної математики, яку умовно можна назвати безперервною і основний об'єкт, з яким має справу звичайна математика - це неперервна шкала і там відстань між числами може бути як завгодно малою, як би не були близько 2 числа між ними все одно знайдуться інші числа, а в дискретній математиці такого немає.

І друга особливість дискретної математики полягає в тому, що звичайна класична математика має справу з числами, і абстрактні конструкції цієї математики - це узагальнення властивостей чисел, то дискретна математика має справу з нечисловими об'єктами, при цьому з об'єктами достатньо складної структури і засоби опису структур це і є одна з задач дискретної математики.

І насамкінець треба відмітити те, що дискретна математика є математичною основою інформатики, науки, які в неї входять порівняно молоді, воно виникли в основному в другій половині 19 століття і справжній бурхливий розвиток вони отримали з розвитком обчислювальної техніки і інформатики.

І не випадково цим 2 антонімам (словам, які мають протилежний сенс) дикретне і неперевне в математиці в техніці є абсолютно точні аналоги – це цифрова і аналогова техніка.

Цифрова – це значить дискретна, а аналогова – це значить неперервна.

Оскільки в техніці переважає цифровий підхід, то дискретна математика є основою інформатики, як заліза (hard were) так і програмування (soft were).

Тема 1. Висловлювання та логічні операції

1.1. Висловлювання

Висловлювання – це твердження, якому за певних обставин можуть бути надані значення "істина" або "хибність". Таке співставлення називається *інтерпретацією* висловлювання.

Отже, терміном "висловлювання" ми маємо на увазі речення, яке може бути оцінене як правильне або неправильне, але не обидва варіанти одночасно. Розділ логіки, що досліджує висловлювання та їх властивості, відомий як пропозиційна логіка, або логіка висловлювань. Перша систематична теорія логіки була розроблена грецьким філософом Арістотелем понад 2300 років тому.

Приклад 1.1. Наведемо приклади речень.

1. Сніг білий.
2. Читай уважно!
3. x+1=3.
4. Котра година?
5. Київ – столиця України

Перше речення є висловлюваннями, друге – ні, третє речення набуває істинне або хибне значення залежно від значення змінної x - висловалювання, четверте не висловлювання, п'яте речення - висловлювання.

Значення "правда" або "неправда", які призначені певному висловлюванню, отримують назву значення істинності цього висловлювання.

"Правду" позначають літерою Т (від англійського truth), а "неправду" - літерою F (від false). Для ідентифікації висловлювань використовуються малі латинські букви як з індексами, так і без них. Символи, використовувані для позначення висловлювань, називають атомними формулами або атомами.

Приклад 1.2.

1. p: "Сніг білий".
2. g: "Київ - столиця України".

Тут символи p, g атомарні формули.

Багато речень утворюють об'єднанням одного або декількох висловлювань. Отримане висловлювання називають складним висловлюванням. Його утворюють із наявних висловлювань застосуванням логічних зв'язок. Такі побудови вперше розглянуто 1845 р. у книзі англійського математика Д. Буля "The Laws of Truth".

Давайте розглянемо, як можна створити нові висловлювання на основі тих, що вже є в нашому розпорядженні.

В логікі висловлювань для цього використовують п'ять логічних зв'язків: заперечення (читаються як "не" та позначаються "¬"), кон'юнкція (читаються як "і" та позначаються "∧"), диз'юнкція (читаються як "або" та позначаються "∨"), імплікація (читається як "якщо..., то" та позначається "→") та еквівалентність (читають "тоді й лише тоді" та позначають "~").

Приклад 1.3.

1. Сніг білий і небо теж біле.
2. Якщо хороша погода, то ми їдемо відпочивати.

В зазначених прикладах, логічні зв'язки виявляються через "та" та "якщо..., то".

Приклад 1.4. Розглянемо прості висловлювання, які позначимо:

p: "Висока вологість", g: "Висока температура", r: "Ми почуваємо себе добре". Речення "Якщо вологість висока та температура висока, то ми не почуваємо себе добре" тепер можна представити як складне висловлювання: "$(p \land q) \rightarrow (\neg r)$".

У логікі висловлювань атом p або складне висловлювання називають правильно побудованою формулою, або формулою.

1.2. Просте висловлювання

Просте висловлювання - це таке висловлювання, яке не можна розкласти на комбінацію інших, більш коротких висловлювань.

1.3. Складні висловлювання

Складні (непрості) висловлювання формуються шляхом поєднання простих за допомогою різних сполучників, таких як "або", "та", "отже" та інші. Не є висловлюваннями запитальні та окличні твердження: "Чи існує життя на Марсі?", "Героям слава!".

1.4. Логічні операції

Логічне множення (кон’юнкція). При множенні логічних операторів ми отримаємо 1 (істину) тільки тоді, коли всі вони будуть рівні 1.

P	Q	$P \wedge Q$
Істинне	Істинне	Істинне
Істинне	Хибне	Хибне
Хибне	Істинне	Хибне
Хибне	Хибне	Хибне

Рис. 1.1. Таблиця істинності для операції кон’юнкція

Логічне додавання (диз’юнкція) – якщо хоча б одне значення істинне, значить істинний і весь вираз.

P	Q	$P \vee Q$
Істинне	Істинне	Істинне
Істинне	Хибне	Істинне
Хибне	Істинне	Істинне
Хибне	Хибне	Хибне

Рис. 1.2. Таблиця істинності для операції диз’юнкція

Логічне заперечення (інверсія) – ця операція завжди перетворює значення в протилежне.

P	$\neg P$
Істинне	Хибне
Хибне	Істинне

Рис. 1.3. Таблиця істинності для операції інверсія

Логічне наслідування (імплакація) – пов’язує 2 логічні вирази за допомогою звороту ***якщо –то***.

Операція імплікація

Методи запам'ятовування таблиці істинності операції *імплікація*

Для кращого зрозуміння суті прямої імплікації та запам'ятовування таблиці істинності можна проілюструвати кілька життєвих прикладів: Особа А - начальник. Вона може видати наказ «працюй» (1) або сказати «роби, що хочеш» (0). Особа В - підлеглий. Він може виконувати роботу (1) або байдикувати (0). У цьому контексті імплікація може бути розглянута як послідовність дій підлеглого відповідно до вказівок начальника. По таблиці істинності легко перевірити, що слухняності немає тільки тоді, коли начальник наказує працювати, а підлеглий ледарює.

Начальник	**Підлеглий**	**Слухняність**
роби що хочеш	байдикує	**є**
роби що хочеш	працює	**є**
працюй	байдикує	**немає**
працюй	працює	**є**

А – предмет студента. Студент може його «знати» (1) або «не знати» (0). В – сесія студента. Сесію можна здати (1) або не здати (0). У такому випадку імплікація – істинність існування заліку/незаліку.

Предмет	**Сесія**	**Правдивість здачі сесії**
не знає предмет	не здає сесію	**правда**
не знає предмет	здає сесію	**правда (бо може таке бути)**
знає предмет	не здає сесію	**неправда**
знає предмет	здає сесію	**правда**

P	Q	$P \to Q$
Істинне	Істинне	Істинне
Істинне	Хибне	Хибне
Хибне	Істинне	Істинне
Хибне	Хибне	Істинне

Рис. 1.4. Таблиця істинності для операції імплікація

Логічна рівність (еквівалентність) – суть полягає в тому, що ця операція хибна тільки тоді, коли вирази різні.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
Істинне	Істинне	Істинне
Істинне	Хибне	Хибне
Хибне	Істинне	Хибне
Хибне	Хибне	Істинне

Рис. 1.5. Таблиця істинності для операції еквівалентність

1.5. Пріоритет логічних операцій (за зростанням пріоритету)

Еквівалентність
Імплікація
Диз'юнкція
Кон'юнкція
Заперечення

1.6. Логіка першого порядку. Предикат. Квантори загальності і існування

Існують такі логічні схеми міркувань, які не можуть бути означені у логікі предикатів.

Розглянемо умовивід:

- Всі люди смертні А.
- Сократ людина В.
- Відповідно Сократ смертний С.

Очевидно, що С слідує з А та В.

Але це логічне не доводиться у логікі висловлювань.

Внутрішню будову висловлювань можна розглядати через розділення на суб'єкт та предикат. Суб'єкт визначає підмет, а предикат описує властивість чи дію, що характеризує цей підмет. Наприклад, Сократ є суб'єкт, який визначає властивість бути людиною. Позначимо його P(x), де x – змінна. Підставляючи в область визначення предиката об'єкти замість змінної x, ми отримуємо висловлювання. Таким чином, одномісний предикат, який описаний на певній множині об'єктів, визначає властивість, якою ці об'єкти можуть або не можуть володіти.

Отже, *одномісним предикатом* P(x), визначеним на множині M називається вираз, який після підстановки в нього замість x об'єкта з області визначення M, перетворюється у виловлювання.

Область визначення предиката називається *предметною областю*

Елементи з області визначення називаються *предметними константами*

Змінна, від якої залежить предикат називається предметною змінною.

Таким чином, одномісний предикат відображає конкретну характеристику певного об'єкта чи предмета з множини визначень.

Предикати можуть бути і двомісними і n-місними.

Приклад двомісного:

Речення $x>y$ можна виразити двомісним предикатом $P(x,y)$, X,Y належить R, який буте приймати істинне значення, якщо число, підставлене замість x буде більше за число, підставлене замість y.

Приклад тримісного предикату:

Об'єкт p, який належить до множини людей, народився в місті з множини q у році r, де r є цілим числом з певного проміжку.

Означення: N – місним предикатом, визначеним на множинах $M1$, $M2$, …< Mn називається вираз, який перетворюється у висловлювання після заміни кожної предметної змінної на елемент з її області визначення. Якщо всі змінні на одній і тій самій множині, то предикат називається однорідним.

Над предикатом визначено всі булеві операції (і, або, не ..) а також 2 нові операції квантор загальності та квантор існування.

Якщо $P(x)$ означає деяку властивість на множині M, то формула $\forall x P(x)$ означає висловлювання: «для будь-якого предмету $m\epsilon M$ виконується властивість $P(x)$» або « всі x мають властивість $P(x)$». Формула $\forall x P(X)$ набуває значення «істина», коли властивість P виконується для всіх об’єктів з M, та набуває «хибність» у протилежному випадку, коли існує хоча б один об’єкт з множини M, для якого ця властивість не виконується.

Формула $\exists x P(x)$ означає: «існує принаймі один предмет х, який має властивість Р». Значення формули $\exists x P(x)$ є істинним, коли властивість Р виконується хоча б для одного об’єкту з множини М, та хибним, коли не існує жодного об’єкта, для якого ця властивість виконувалась би.

Якщо М=$\{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n\}$ - скінчена множина, на якій визначений предикат Р(х), тоді формули з предикатами можна виразити через логічні кон'юнкції та диз'юнкції.

$$\forall x P(X) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$$
$$\exists x P(X) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$$

Отже, можна сказати, що квантор загальності можна розглядати як узагальнення кон'юнкції, а квантор існування - як узагальнення диз'юнкції на нескінченну область визначення.

Приклад

Сума двох додатних чисел – додатне число.

Спочатку перепишемо речення так:

Два довільні додатні числа дають у сумі додатне число. Введемо змінні x та y і отримаємо речення:

Будь-які додатні числа x та y утворюють суму $x + y$, яка є додатнім числом.

Напишемо це формулою:

$$\forall x \forall y\big(\big((x > 0) \wedge (y > 0)\big) \rightarrow (x + y) > 0\big)\big)$$

Тут предметна область – усі дійсні числа.

Предикатом називають *функціональне висловлювання*, а *висловлювання* - предикатною константою.

Розглянемо приклади логічних функцій. Нехай маємо ряд простих висловлювань:

P_1 = "4 ділиться на 2"

P_2 = "5 ділиться на 2"

P_3= "6 ділиться на 2"

. . . .

P_{97}="100 ділиться на 2".

Замість цих висловлювань, що можуть бути або істинними, або хибними, можна ввести одномісний предикат P(x) = "x ділиться на 2", де x належить множині x ={4,5,6, …., 100}.

1.7. Операції над предикатами

Операції над предикатами це різноманітні дії, які можна виконувати з предикатами для отримання нових предикатів або для вираження їхніх відносин. Основні операції над предикатами включають:

Кон'юнкція (логічне "I"): Об'єднання двох предикатів, яке відбувається, коли обидва вони є істинними.

Диз'юнкція (логічне "АБО"): Створення предикату, який є істинним, якщо хоча б один з вихідних предикатів є істинним.

Заперечення (логічне "НІ"): Створення предикату, який має протилежне значення до вихідного предикату.

Вирази кванторів (загальності та існування): Використання кванторів для формулювання умов зв'язку між предикатами та їхніми кількостями.

Ці операції використовуються для складання складних висловлювань та формулювання різних логічних відносин між ними.

Аудиторне завдання

1. Знайдіть серед зазначених нижче речень висловлювання. Вкажіть їх істинні значення.

a) Як пройти в бібліотеку?

b) Ціле число 1 є найменшим додатнім цілим числом.

c) Якщо $x = 3$, то $x^2 = 6$.

d) Обережно, бурульки!

e) Чоп – найзахідніше місто України.

2. Нехай p, q позначають наступні висловлювання:

p: Сьогодні гарна погода;

q: Я піду на пляж;

Запишіть у символічній формі наступні висловлювання:

a) Сьогодні гарна погода і я піду на пляж

b) Сьогодні погана погода і я не піду на пляж

c) Якщо сьогодні буде гарна погода, то я піду на пляж

3. Нехай a, b і c позначають наступні висловлювання:

a: Їй подобаються червоні автомобілі;

b: Вона популярна;

c: У неї дивні друзі.

Запишіть наступні символічні вирази у вигляді висловлювань:

a) $(a \wedge b) \rightarrow c$;

b) $b \rightarrow \neg c$;

c) $a \rightarrow (b \vee c)$;

d) $(a \rightarrow \neg b) \wedge (b \rightarrow c)$.

4. Для наведених висловлювань побудуйте таблиці істинності

a) $a \wedge (b \vee \neg c)$;

b) $\neg(\neg a \vee (b \wedge \neg c))$;

c) $((a \rightarrow b) \vee \mathrm{c}) \rightarrow (\neg a \vee \neg b)$;

d) $(a \wedge \neg(b \vee \neg c)) \leftrightarrow (a \rightarrow b)$.

5. Знайдіть істинні висловлювання:

a) Якщо $2^2 = 4$, то $3^2 = 9$;

b) Якщо $2^2 = 5$, то $3^2 = 9$;

c) Якщо $2^2 = 5$, то $3^2 = 10$;

d) Якщо $2^2 = 4$, то $3^2 = 10$.

Домашнє завдання

1. Знайдіть серед зазначених нижче речень висловлювання. Вкажіть їх істинні значення.

a) 2 єдине просте парне число.

b) Користуйтесь ліцензійним програмним забезпеченням.

c) Це твердження не може бути істинним.

d) Сатурн – найближча до сонця планета.

e) Паління шкодить здоров'ю.

2. Нехай *p, q* і *r* позначають наступні висловлювання:

a: Я витрачаю багато часу на підготовку до занять;
b: Я отримаю оцінку відмінно на всіх контрольних;
c: Мені зарахують екзамен автоматом.

Побудуйте висловлювання

a) $\neg b \vee c$;
b) $\neg b \wedge \neg c$;
c) $\neg(a \vee b)$;
d) $(a \wedge b) \vee \neg c$).

3. Нехай *a, b* і *c* позначають наступні висловлювання:

a: Він читає комікси;
b: Він любить наукову фантастику;
c: Він – вчений-фізик.

Запишіть у символічній формі наступні висловлювання:

a) Якщо він читає комікси і любить наукову фантастику, то він – вчений-фізик.
b) Якщо він не читає комікси і не любить наукову фантастику, то він не є вченим-фізиком.
c) Якщо він читає комікси, то він любить наукову фантастику, і якщо він не читає комікси, то він – вчений-фізик.
d) Якщо він – вчений-фізик, то він читає комікси або він не любить наукову фантастику.

4. **Сформувати таблиці істинності для висловлювань**:

a) $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$;
b) $(p\ ) \rightarrow q) \wedge ((p \rightarrow q) \vee r))$;
c) $((p \rightarrow q) \wedge \neg r) \rightarrow \neg(p \vee \neg r)$;
d) $q \wedge (p \vee r) \leftrightarrow ((q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r))$.

5. **Розглянемо значення істинності наступних складних висловлювань, де *f* є істинним висловлюванням, а *t* - хибним.**

$(f \vee t) \rightarrow f$;
$(f \wedge t) \rightarrow f$;
$f \rightarrow (f \wedge t)$;
$f \rightarrow (f \vee f)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Опрацювання матеріалів лекції
2. Виконання домашнього завдання
3. Опрацювання запропонованих додаткових джерел

Контрольні запитання та завдання до теми 1

1. Визначення висловлювання.
2. Визначення предикату.
3. Визначення квантору.
4. Основні логічні операції над висловлюваннями та предикатами.
5. Таблиці істинності.

Посилання на відео лекції за темою № 1

Тема_1. Ч.1 -
https://drive.google.com/file/d/1XW8rpN_GY82pMnGupVa34GmvRf-NllEX/view?usp=sharing

Тема_1. Ч.2 –
https://drive.google.com/file/d/1XWBosk2XvUQGTpM5ZZZ3cvb_LddExv85/view?usp=sharing

Тема 2. Множини, операції над множинами

2.1. Історична довідка

Теорія множин - це математична дисципліна, що вивчає множини, які є наборами унікальних елементів. Ця теорія була розвинена в кінці XIX - початку XX століття великим математиком Георгом Кантором і іншими вченими. Основні поняття теорії множин були сформульовані Кантором, який також вніс значний внесок у розвиток інших галузей математики, таких як математична логіка та аналіз.

Основоположний труд Кантора "Групування та континуум" (1874 рік) вважається першим систематичним викладом теорії множин. У цій роботі Кантор визначив поняття множини, її розміру (кількості елементів) і запропонував поняття раціонального та ірраціонального чисел, а також відкрив новий тип неперервних невід'ємних чисел, які називаються відомими як канторівські числа.

Однак основні ідеї теорії множин Кантора спочатку зустріли опір серед деяких математиків, у тому числі Лейбніца та Кантора самого, який страждав від депресії та критики своєї роботи. Тим не менш, з часом теорія множин стала однією з найбільш впливових галузей математики, знайшла застосування у великій кількості областей, включаючи математичну логіку, топологію, теорію чисел та інші.

Сьогодні теорія множин є однією з основних складових сучасної математики і є важливою для багатьох інших галузей науки та технології, таких як комп'ютерні науки, фізика, економіка та інші. Вона продовжує розвиватися і вдосконалюватися завдяки внеску численних математиків у всьому світі.

2.2. Визначення множини, елемента множини, включення множин

Загальні поняття теорії множин включають такі основні визначення:

Множина: Множина - це колекція унікальних об'єктів, які називаються елементами множини. Множина може бути представлена у вигляді переліку елементів, розділених комою, і укладатися у фігурні дужки. Наприклад, множина цілих чисел від 1 до 5 може бути записана як $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Елемент множини: Елемент множини - це об'єкт, який входить до даної множини. Наприклад, у множині {червоний, жовтий, зелений} кольори "червоний", "жовтий" і "зелений" є елементами множини.

Включення множин: Множина A включена в множину B (позначається як $A \subseteq B$), якщо всі елементи множини A також є елементами множини B. Іншими словами, кожен елемент множини A є також елементом множини B. Наприклад, якщо множина $A = \{1, 2\}$, а множина $B = \{1, 2, 3\}$, тоді ми можемо сказати, що $A \subseteq B$, оскільки всі елементи множини A також є елементами множини B.

Ці поняття є фундаментальними для розуміння теорії множин і використовуються в різних математичних та наукових контекстах.

2.3. Способи задання множин

Множину можна задати різними способами, основні з яких включають:

Перерахування елементів: У цьому способі множина представлена списком її елементів, розділених комами і включених у фігурні дужки. Наприклад, множина натуральних чисел менших за 5 може бути записана як $\{1, 2, 3, 4\}$.

За допомогою характеристичного опису: Можна описати властивості елементів, які входять у множину. Наприклад, множина парних чисел може бути описана як {x | x є Z і x кратне 2}.

За допомогою математичних виразів: У цьому випадку можна використовувати математичні вирази для визначення множини. Наприклад, множина дійсних чисел менших за 1 може бути записана як $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

Використання інших множин: Множина також може бути задана шляхом використання вже відомих множин та операцій над ними. Наприклад, множина дійсних чисел від 0 до 1 може бути представлена як перетин множин $[0, 1]$ та $\mathbb{R}$ (множина всіх дійсних чисел).

Ці способи задання множин дають можливість точно визначити, які елементи входять у множину і які не входять.

2.4. Підмножина

Якщо кожен елемент однієї множини *A* є елементом другої множини *B*, то кажуть, що перша множина *A* є підмножиною другої множини *B* і записують так: $A \subset B$.

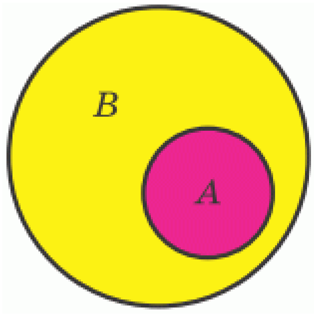


Рис. 2.1. Множина, підмножина

Також використовують запис "А є підмножиною або рівною В", позначаючи його як $A \subseteq B$, що означає, що множина А входить в множину В або має з ним однаковий обсяг.

2.5. Відношення між множинами. Діаграми Ейлера-Венна

Операції над множинами

Перетин (переріз) множин

Перетином множин *A* і *B* називають множину, яка складається з у сіх елементів, що належать і множині *A*, і множині *B*. Перетин множин *A* і *B* позначають так: $A \cap B$.

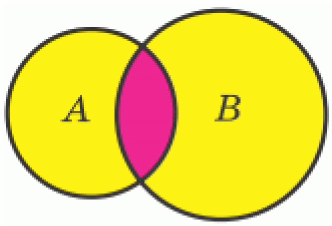


Рис. 2.1. Перетин множин

Об'єднання множин

Множина, утворена об'єднанням множин А і В, складається з усіх елементів, які присутні принаймні в одній з цих множин, тобто в множині А або в множині В. Об'єднання множин А і В позначається символом $A \cup B$.

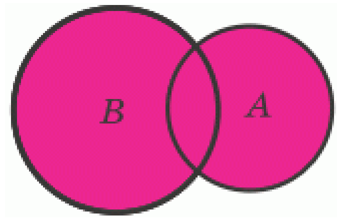


Рис. 2.2. Об'єднання множин

Різниця множин

Різницею множин A і B називається множина, яка складається з усіх елементів, які належать множині A і не належать множині B. Різницю A і B позначають так: $A\setminus B$.

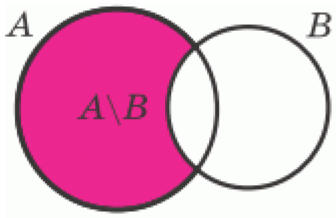


Рис. 2.3. Різниця множин

Доповнення множини визначається так: якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь універсальної множини U, то різниця $U\setminus A$ називається доповненням множини A.

Тобто доповненням множини A називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині A (але які належать універсальній множині U). Доповнення множини A позначають так: A^{-}.

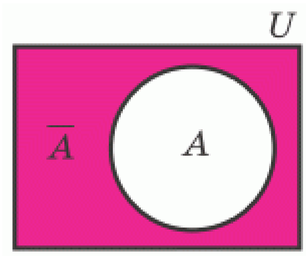


Рис. 2.5. Доповнення

Симетрична різниця двох множин - це множина, що складається з елементів, які належать хоча б одній з цих двох множин, але не належать одночасно обом.

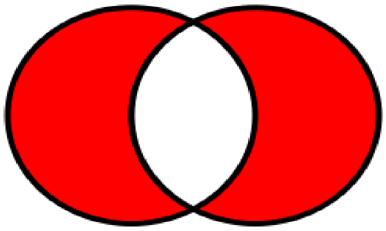


Рис. 2.4. Симетрична різниця

2.6. Операції над множинами

Дозволяють будувати нові множини, використовуючи вже існуючі.

Об'єднання множин

Об'єднанням множин A і B називають множину, складену з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з множин *A і B*
(позначають: $A \cup B$)

$A \cup B = \{x |\ x \in A \vee x \in B\}$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

Перетин множин

Перетин множин A і B - це множина, яка складається з елементів, що належать одночасно і множині A, і множині B (позначається: A ∩ B).

$A \cap B = \{x |\ x \in A \wedge x \in B\}$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

Різниця множин

Різницею множин A і B є множина, що складається з елементів, що належать множині A, але не належать множині B (позначається $A \backslash B$, $A - B$).

$A \backslash B = \{x |\ x \in A \wedge x \notin B\}$

$x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B$

Симетрична різниця

Симетрична різниця множин A і B - це множина, що складається з елементів, які належать лише одній з множин A або B, але не належать обом одночасно (позначається: $A \div B$ або $A \Delta B$).

$x \in A \div B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$

$A \div B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Аудиторне заняття

1. Перерахуйте елементи множини $\{x|\ x$ – ціле і $x^2<70\}$.

2. Опишіть множину {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16} за допомогою характеристичної властивості.

3. Перерахуйте підмножини множини {♦, ♥, ♠}.

4. Встановіть істинність або хибність кожного з наступних тверджень:
   a. $\varnothing \subseteq \varnothing$;
   b. $\varnothing \subset \varnothing$;
   c. $\varnothing \in \varnothing$;
   d. $\varnothing \subseteq Q$ (Q – довільна множина);
   e. $\varnothing \in B$ (B – довільна множина).

5. Визначте кількість елементів у кожній множині:
   a. $\{a,\ b,\ c,\ \{q\}\}$;
   b. $\{\{\varnothing,\ \varnothing,\ \{\varnothing\}\}\}$;
   c. $\{1,\ \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}, 10, 12, \{14\}\}$;
   d. $\{\varnothing,\ 1,\ \{1,\ 3\},\ 2,\ 4,\ \{\{2,\ 3\},\ 8\},\ 7\}$;
   e. $\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}\}\}$;

6. Нехай $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $B = \{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9, 10\}$, $C = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, а $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$. Визначте наступні множини:
   a. $A \cup C$;
   b. $A \cap B$;
   c. $A \cap (B \cup C)$;
   d. $(A \cap B) \cup C$;
   e. $\overline{(A \cap B)}$;
   f. $\bar{A} \cap \bar{B}$;
   g. $A \div B$;
   h. $A \backslash B$.

7. Для кожної з наведених нижче множин побудувати діаграму Ейлера-Венна:
   a. $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$;
   b. $A \cup (B \cap C)$;
   c. $(B \cap C) \backslash A$;

d. $\overline{(A \cap B \cap C)}$;
e. $A \div B$.

Домашнє завдання

1. Перерахуйте елементи множини $\{x|x - \text{просте число і } x < 30\}$.
2. Опишіть множину $\{у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ь, ю, я\}$ за допомогою характеристичної властивості.

3. Перерахуйте підмножини множини $\{1, 2, 3, 4\}$.

4. Встановіть істинність або хибність кожного з наступних тверджень:
   a. $a \in \{a\}$;
   b. $a \in \{\{a\}\}$
   c. $a \in \{a, b, c\}$;
   d. $a \in \{\{a, b, c\}\}$;
   e. $a \in \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
   f. $\{a\} \in \{a, b, c\}$;
   g. $\{a\} \in \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
   h. $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$;
   i. $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
   j. $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$.

5. Встановіть істинність або хибність кожного з наступних тверджень:
   a. $\{a\} \in \{a, b, c, d, e\}$;
   b. $\{a\} \subset \{a, b, c, d, e\}$;
   c. $\{a, b, c\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$;
   d. $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$.

6. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, а $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Визначте наступні множини:
   a. $A \setminus C$;
   b. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
   c. $A \cap (B \cap \bar{C})$;
   d. $(A \cup C) \setminus \bar{B}$;
   e. $(A \setminus \emptyset) \cup (A \setminus A)$;
   f. $B \div C$;
   g. $C \setminus A$.

Завдання для самостійної роботи

1. Опрацювання матеріалів лекції.
2. Виконання домашнього завдання.
3. Опрацювання запропонованих додаткових джерел.

Контрольні запитання до теми 2

1. Операція об’єднання.
2. Операція перетин.
3. Операція різниця.
4. Операція доповнення.
5. Операція симетрична різниця.
6. Операція декартовий добуток.

Посилання на відео лекції за темою № 2

Тема_2. Ч.1 - https://drive.google.com/file/d/1XW__ocmI0CemFo5dYq8qeZebX5MPeMxG/view?usp=sharing

Тема_2. Ч.2 - https://drive.google.com/file/d/1XXHoV5JpXR-1nmE-qbH1eMDkJvYG7lm3/view?usp=sharing

Тема 3. Властивості операцій над множинами

3.1. Основні теоретико-множинні тотожності

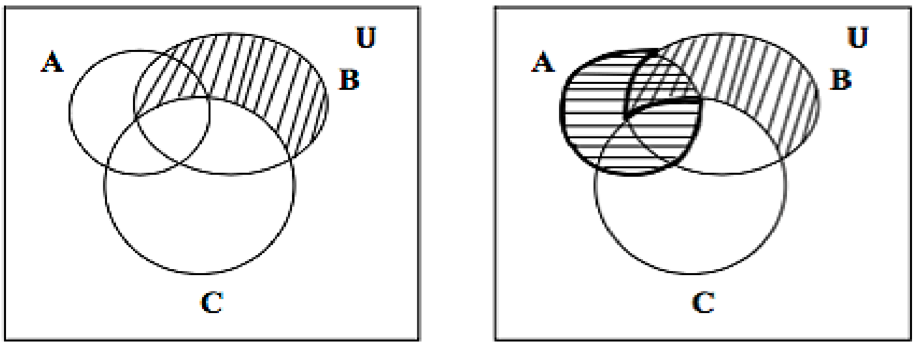
Дозволяють проводити еквівалентні перетворення виразів з множинами та спрощувати їх.

Доведення тотожностей за допомого діаграм Ейлера

Довести тотожність:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

а)



B\C A\(B\C)

Рис. 3.1. Ліва частина тотожності

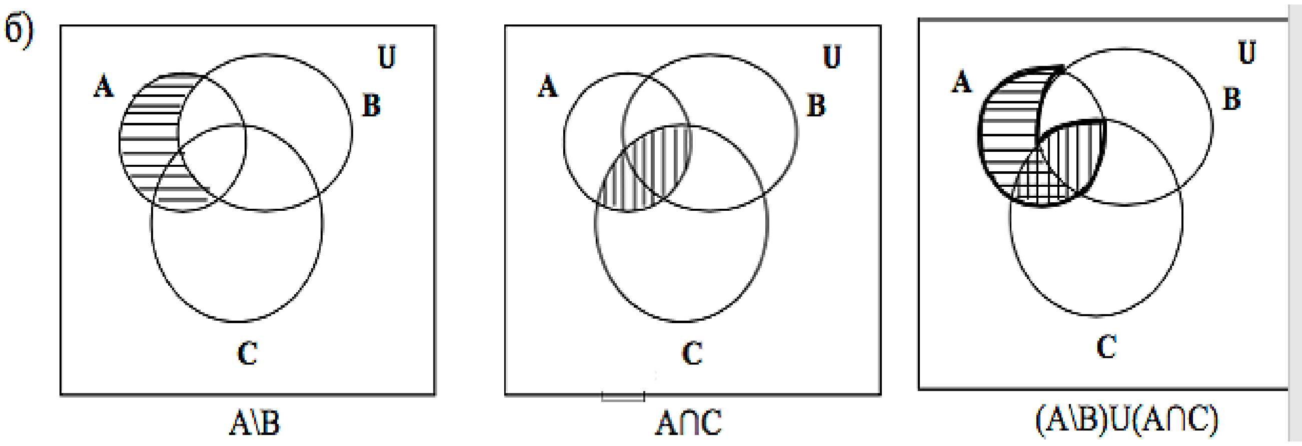


Рис. 3.2. Права частина тотожності

З рисунків видно, що ліва частина дорівнює правій, значить тотожність доведена.

Закон ідемпотентності

Закон ідемпотентності використовується в різних галузях науки та інженерії, включаючи математику, комп'ютерні науки, теорію баз даних, телекомунікації та інші.

У загальному розумінні, закон ідемпотентності означає, що застосування операції до об'єкта один чи кілька разів не змінює його стану після першого застосування. Це означає, що якщо ви застосуєте операцію до об'єкта, потім застосуєте її знову, результат буде такий самий, як і після першого застосування.

Ось деякі приклади застосування закону ідемпотентності:

HTTP методи: У веб-розробці, HTTP методи GET і PUT є ідемпотентними, тобто виконання їхніх операцій кілька разів не призведе до зміни стану сервера.

Операції з базами даних: У контексті баз даних, операції SELECT, INSERT, UPDATE та DELETE можуть бути ідемпотентними, якщо вони не змінюють дані або змінюють їх у такий спосіб, що додаткові операції не мають впливу на результат.

Математичні операції: У математиці, багато операцій, таких як додавання, множення, або взяття максимуму/мінімуму, є ідемпотентними. Наприклад, якщо ви додасте число до іншого числа, а потім додасте його знову, ви отримаєте той самий результат, якщо вибрані операції мають властивість ідемпотентності.

Застосування закону ідемпотентності допомагає забезпечити надійність та консистентність систем, оскільки воно дозволяє виконувати операції без страху втрати даних або виклику небажаних побічних ефектів.

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Властивість комутативності

Властивість комутативності є однією з фундаментальних в математиці та комп'ютерних науках. Ця властивість визначає, як порядок операндів впливає на результат виконання операції.

Формально, операція називається комутативною, якщо порядок операндів не впливає на результат операції.

Наприклад, для операції додавання чисел, властивість комутативності означає, що порядок доданків не має значення для суми. Наприклад:

2 + 3 = 3 + 2 = 5 або 2*3 = 3*2 = 6

Властивість комутативності важлива не лише в арифметиці, а й у багатьох інших областях математики та комп'ютерних наук. Наприклад, в алгебрі булевих функцій, конкатенації рядків, об'єднання множин тощо.

У комп'ютерних науках, врахування властивості комутативності допомагає здійснювати оптимізації обчислень та розробляти ефективні алгоритми. Враховуючи цю властивість, можна зменшити кількість операцій та накладні витрати при обробці даних, що є важливим у практичних застосуваннях, де час та ресурси обмежені.

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Властивість асоціативності

Властивість асоціативності є важливою концепцією в математиці та комп'ютерних науках, особливо в алгебрі та операціях, що виконуються над об'єктами.

Асоціативність визначає, як об'єкти групуються в операціях. Формально, операція називається асоціативною, якщо порядок групування операндів не має значення для результату операції.

Наприклад, для операції додавання чисел, властивість асоціативності означає, що результат буде однаковим, незалежно від того, як групуються числа. Наприклад: (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)

Тут додавання асоціативне, оскільки незалежно від того, чи додаємо ми спочатку 2 до 3, а потім 4, чи спочатку 3 до 4, а потім 2, результат залишається тим самим.

Властивість асоціативності також має важливе значення в алгебрі булевих функцій, множенні матриць, конкатенації рядків та багатьох інших операціях.

У комп'ютерних науках ця властивість може мати практичне застосування при оптимізації виконання операцій, а також при розробці алгоритмів та структур даних. Врахування асоціативності дозволяє ефективно використовувати обчислювальні ресурси та зменшувати накладні витрати на обробку даних.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Властивість дистрибутивності

Властивість дистрибутивності - це ключове поняття в математиці, яке вказує на взаємозв'язок між двома операціями над об'єктами, які зазвичай є арифметичними операціями.

Ця властивість є важливою в алгебрі, арифметиці, теорії чисел, і вона має різні застосування в комп'ютерних науках, зокрема в аналізі алгоритмів та роботі з виразами.

У теорії кіл, або полів, дистрибутивність є однією з основних властивостей алгебраїчних структур. В контексті роботи з виразами і розв'язання математичних задач, властивість дистрибутивності часто використовується для спрощення виразів та виведення нових математичних тотожностей.

У програмуванні, ця властивість може бути використана для оптимізації обчислень та розробки більш ефективних алгоритмів. Знання та розуміння дистрибутивності дозволяє програмістам писати більш ефективний та зрозумілий код.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Закон де Моргана в теорії множин

Це логічні правила, які пов’язують пари логічних операцій за допомогою логічного заперечення

- не(p і q)=(не p) або (не q)
- не(p або q)=(не p) і (не q)

Застосування закону де Моргана дозволяє ефективно спрощувати складні булеві вирази, перетворюючи їх на більш зрозумілі та менш об'ємні форми. Це особливо важливо в логіці, комп'ютерних науках, цифровій електроніці та в багатьох інших галузях, де використовується булева алгебра.

У програмуванні, зокрема в умовних виразах та логічних операціях, закон де Моргана дозволяє писати більш чіткий, зрозумілий та ефективний код, який легше підтримувати та модифікувати.

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\neg(p \wedge q) \iff (\neg p) \vee (\neg q)$						
p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

$\neg(p \vee q) \iff (\neg p) \wedge (\neg q)$						
p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Рис. 3.3. Таблиці істинності для правил де Моргана

Властивості тотожності

Властивість тотожності в математиці та логіці вказує на те, що деяке вираз або операція завжди має один і той самий результат або значення. Ця властивість є основною для багатьох математичних теорем і доведень.

В контексті різних математичних операторів та операцій, властивість тотожності може мати різне значення.

Наприклад, у бінарних операціях, таких як додавання або множення, тотожність може виражатися як комутативність або асоціативність. Наприклад, для додавання:

$a+b=b+a$

Ця властивість вказує на те, що порядок доданків не впливає на суму.

У логіці, тотожність може виражатися у вигляді законів де Моргана, які стверджують, що заперечення кон'юнкції (AND) дорівнює диз'юнкції заперечень, і навпаки.

Тотожність також є важливою у теорії рівнянь, де деякі вирази можуть бути ідентичними або еквівалентними, і, таким чином, можна використовувати різні методи та теореми для їх спрощення або розв'язання.

Узагальнюючи, властивість тотожності допомагає зрозуміти, як операції та вирази взаємодіють один з одним, що дозволяє спрощувати складні математичні вирази та знаходити їх розв'язки.

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$
$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$$

Властивості доповнення

Властивість доповнення - це основна концепція в багатьох галузях математики та логіки, яка описує відношення між об'єктом та його доповненням.

У багатьох випадках, особливо в булевій логіці, доповнення використовується для знаходження протилежності об'єкта. Наприклад, якщо у нас є множина в булевій алгебрі, доповнення цієї множини - це підмножина, яка містить усі елементи, які не входять до вихідної множини.

В контексті комп'ютерних наук, доповнення може використовуватися у бітових операціях, де доповнення біта 0 це 1, а доповнення 1 це 0.

Властивості доповнення важливі для розуміння взаємодії між об'єктами, та їх роль широко застосовується в різних областях математики, логіки, теорії множин і комп'ютерних наук.

$$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$\overline{U} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = U$$

Властивість різниці

Ця властивість є важливою для визначення відношень між множинами та робить можливим розуміння та моделювання різних ситуацій.

У практичних застосуваннях, властивість різниці може бути корисною для фільтрації даних, видалення зайвої інформації або визначення різниці між двома наборами об'єктів.

Вивчення властивостей різниці допомагає розвивати абстрактне мислення та розуміння взаємодії між множинами об'єктів у математиці та інших областях.

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Властивість симетричної різниці

Властивість симетричної різниці є важливою концепцією в теорії множин та дискретній математиці. Симетрична різниця множин вказує на елементи, які належать лише одній з множин, але не належать обом.

Ця властивість має деякі цікаві властивості, зокрема:

Комутативність: Симетрична різниця множин комутативна

Асоціативність: Симетрична різниця також є асоціативною, що означає, що результат не залежить від порядку застосування операцій.

Ідемпотентність: Якщо застосувати симетричну різницю до множини з самою собою, результат буде пустою множиною, оскільки всі спільні елементи зникнуть.

Властивість симетричної різниці знаходить своє застосування в багатьох областях, включаючи теорію множин, логіку, комп'ютерні науки, телекомунікації тощо. Вона дозволяє визначати та розуміти взаємні відносини між множинами та елементами.

$$A \div B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$
$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Пріоритети операцій за спаданням:

1. Доповненння
2. Перетин
3. Об'єднання або різниця (однаковий пріоритит)
4. Симетрична різниця

Доведення теоретико множинних тотожностей

Властивість комутативності

$A \cup B = B \cup A$, оскільки має місце наступний ланцюжок еквівалентностей:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow$ {визначення $\cup$}

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow$ {для $\vee$ порядок не важливий}

$\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow$ {визначення $\cup$}

$\Leftrightarrow x \in B \cup A$

Властивість дистрибутивності

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow$ {визначення $\cup$ і $\cap$}

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$ {дист. з логіки}

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow$

{визначення $\cup$}

$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \Leftrightarrow$ {визначення $\cap$}

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Закон де Моргана

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow$ {визначення доповнення}

$\Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A \cap B \Leftrightarrow$ {визначення $\notin$}

$\Leftrightarrow x \in U \wedge \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow$ {визначення $\cap$}

$\Leftrightarrow x \in U \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ { Моргана}

$\Leftrightarrow x \in U \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow$ {властивість дистр.}

$\Leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A) \vee (x \in U \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$ {$U \cap A = A$}

$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow$ {визначення доповнення}

$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

29

Властивості доповнення

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

$x \in A \cap \overline{A} \Leftrightarrow$ {визначення $\cap$}

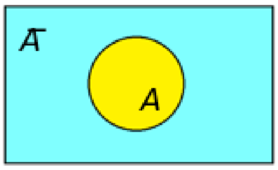
$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ {визначення доповнення}

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in U \wedge x \notin A) \Leftrightarrow$ {визначення асоц.}

$\Leftrightarrow x \in U \wedge (x \in A \wedge x \notin A) \Leftrightarrow$ {$A \cap \overline{A} = \varnothing$}

$\Leftrightarrow x \in U \wedge \varnothing \Leftrightarrow$ {$A \cap \varnothing = \varnothing$}

$\Leftrightarrow \varnothing$



32

Рис.3.4. Доповнення

Властивість різниці

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow$ {визначення різниці}

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow$ $\{\notin\}$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow$ {визначення $\cap$}

$\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$

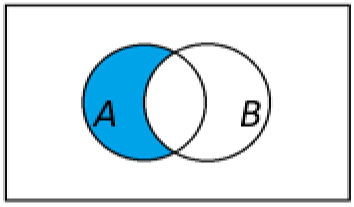


Рис. 3.5. Різниця

3.2. Визначення декартового добутку

Декартовим добутком множин *A* та *B* називається множина впорядкованих пар (*a*, *b*) таких, що $a \in A$ і $b \in B$.

$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$

Декартів добуток можна розширити на будь-яку скінченну колекцію множин.

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$

Якщо хоча б одна з множин A_i ($i \in 1,\ldots,n$) **порожня**, то $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \varnothing$

Декартовий добуток декількох множин називається множиною кортежів довжиною *n*, які утворені так, що перший елемент кортежу належить множині *A*1, другий *A*2, ….., *n*-й *A*n.

Приклад 1. Задано 3 множини: A1, A2, A3. Знайти декартовий добуток цих множин.

Розв’язок:

A1={2,3}, A2={3,4,5}, A2={7,8}

$A_1 \times A_2 \times A_3 =$

{(2,3,7);(2,3,8);(2,4,7);(2,4,8);(2,5,7);(2,5,8);(3,3,7);(3,3,8);(3,4,7);(3,4,8);(5,3,7);(5,3,8)}

Приклад 2.

Множина X складається з 13 елементів { A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 }, множина Y — з 4 елементів {червоний, чорний, блакитний, зелений}, тоДІ декартів добуток цих множин є 52-елементною множиною (оскільки 13×4=52)

{(А, червоний), (K, червоний), ... , (2, червоний), (А, чорний), ... , (3, зелений), (2, зелений)}.

Кортежі

- Послідовності $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називають кортежами, векторами або впорядкованими наборами довжини n.
- Кількість координат кортежу називається його довжиною, або розмірністю.
- Два кортежі однакової довжини $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ вважаються рівними, якщо всі їхні відповідні компоненти співпадають, тобто $a_i = b_i$ для кожного і від 1 до n
- Кортежі різної довжини вважаються нерівними.

3.3. Проекція множини

Проекції множин - це поняття, яке зазвичай використовується в контексті теорії відношень та теорії баз даних. Вони дозволяють витягти певні аспекти або підмножини даних з великої колекції об'єктів.

Проекція на певні поля: В теорії баз даних, проекція на певні поля означає відбір лише певних атрибутів (полів) з кортежів (рядків) бази даних. Наприклад, якщо у нас є таблиця з інформацією про студентів, ми можемо витягти лише їх імена та прізвища, проігнорувавши інші дані.

Проекція на певний підмножин: Інколи, ми хочемо витягти лише ті кортежі, які відповідають певним умовам. Наприклад, якщо у нас є таблиця студентів, ми можемо витягти лише тих студентів, які займаються математикою.

Проекція на унікальні значення: Іноді, нам потрібно витягти лише унікальні значення з певного поля. Наприклад, якщо у нас є таблиця з рівнем освіти, ми можемо витягти лише унікальні рівні освіти, ігноруючи повторювані значення.

Проекції множин важливі в теорії баз даних, аналізі даних, та різних областях, де обробка та аналіз великих об'ємів інформації є ключовим завданням. Вони допомагають зменшити об'єм даних до необхідного мінімуму, виключаючи зайву інформацію та фокусуючись на необхідному контексті.

Нехай H – підмножина декартового добутку множин A та B: $H \subset A \times B$

Першою проекцією множини $H \subset A \times B$ називається множина тих елементів $x \in A$, для яких існує $y \in B$ такий, що $(x,y) \in H$

$\mathrm{Pr}_1 H = \{x \in A \mid \exists\, y \in B\ (x,y) \in H\}$

Другою проекцією множини $H \subset A \times B$ називається множина тих елементів $y \in B$, для яких існує $x \in A$ такий, що $(x,y) \in H$

$Pr_2 H = \{y \in B \mid \exists\, x \in A\ (x,y) \in H\}$

Нехай H – підмножина декартового добутку множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$: $H \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

***k*-тою проекцією** множини $H \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається множина тих елементів $x_k \in A_k$, для яких існують $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_{k-1} \in A_{k-1}, x_{k+1} \in A_{k+1}, \ldots, x_n \in A_n$ такі, що $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$

$Pr_k H = \{x_k \in A_k \mid \exists\, x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_{k-1} \in A_{k-1}, x_{k+1} \in A_{k+1}, \ldots, x_n \in A_n\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H\}$

Приклади проекцій множин

- $\mathbf{Pr_1(A \times B) = A}$

$H = \{(a,b)\}$, $Pr_1 H = \{a\}$

$V = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$, $Pr_1 V = \{1,2\}$

- $\mathbf{Pr_2(A \times B) = B}$

$H = \{(a,b,c,d)\}$, $Pr_2 H = \{b\}$

$V = \{(1,3), (2,4), (1,2)\}$, $Pr_2 V = \{2,3,4\}$

$F = \{(1,3,5), (2,3,5), (1,3,2)\}$, $Pr_{2,3} V = \{(3,5), (3,2)\}$

- $\mathbf{Pr_i (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = A_i}$, $i \in 1, \ldots, n$

3.4. Властивості операцій декартового добутку множин

Декартів добуток **не є комутативним**, тобто $A \times B \neq B \times A$

Декартів добуток **не є асоціативним**, тобто $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

Декартів добуток виявляє дистрибутивність до операцій об'єднання, перетину та різниці.

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

$(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$

Дистрибутивність декартового добутку (доведення) відносно операції перетину

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

Дистрибутивність декартового добутку (доведення) відносно операції різниці

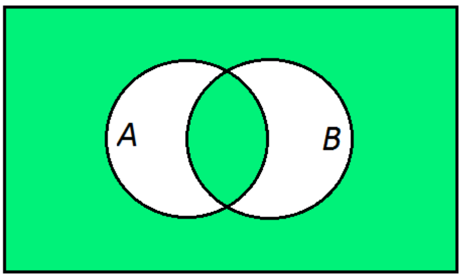
$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$
$(x, y) \in (A \times B) \backslash (A \times C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge \neg((x, y) \in A \times C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \notin A \vee y \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varnothing \vee (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \backslash C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times (B \backslash C)$

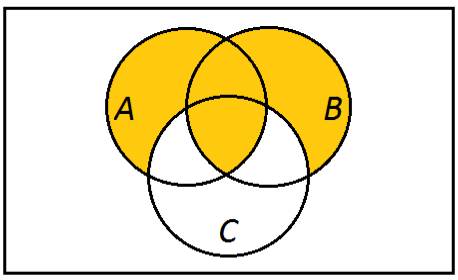
Аудиторне завдання

1. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{a, b\}$. Визначте:
   a. $A \times B$;
   b. $B \times B$;
   c. $A \times \emptyset$.

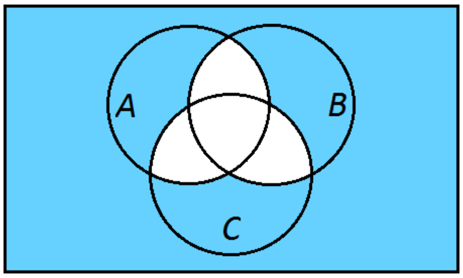
2. Для кожної з наведених нижче множин побудувати діаграму Ейлера-Венна:
a. $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$;
b. $A \cup (B \cap C)$;
c. $(B \cap C) \backslash A$;
d. $\overline{(A \cap B \cap C)}$;
e. $A \div B$.

3. Опишіть множини зображені на діаграмах Ейлера-Венна:

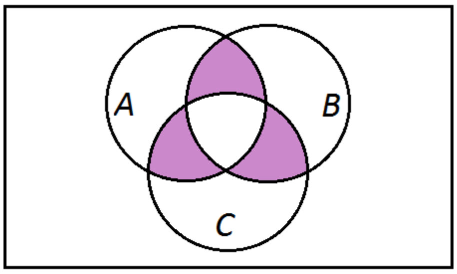
a.


b.


c.



d.



4. Довести, що
   a. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
   b. $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cup C \subseteq B \cup C$;
   c. $A \subseteq B \;\Rightarrow\; C\backslash B \subseteq C\backslash A$.

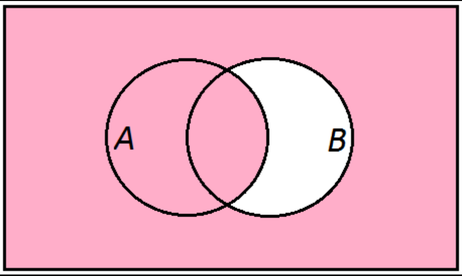
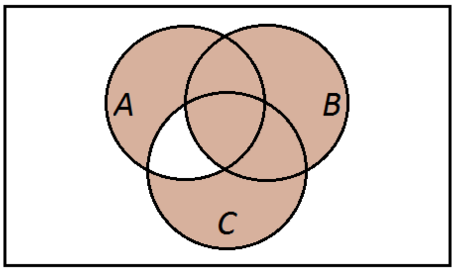
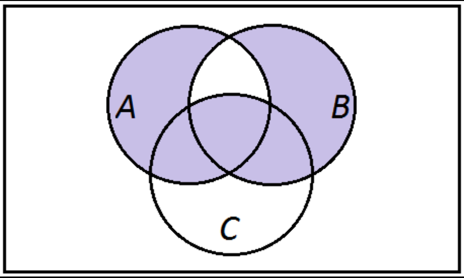
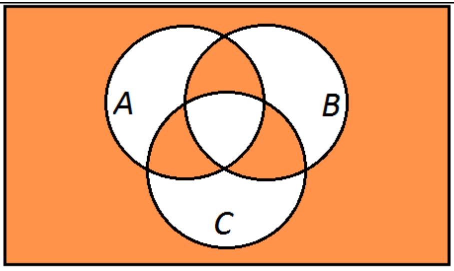
5. Довести наступні теоретико-множинні тотожності:
   a. $A \cap (B\backslash C) \;=\; (A \cap B)\backslash C$;
   b. $A\backslash(B \cup C) \;=\; (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$;
   c. $(A \cap B)\backslash C \;=\; (A \cap B)\backslash(A \cap C)$;
   d. $A\backslash(A\backslash B) \;=\; A \cap B$;

Домашнє завдання

1. Нехай $A \;=\; \{r,\; t,\; q\}$, а $B \;=\; \{\mathrm{a},\; b,\; c\}$. Визначте:
   a) $A \times A$;
   b) $B \times A$;
   c) $B \times \emptyset$.

2. Для кожного з наведених нижче множин побудувати діаграму Ейлера-Венна.
   a) $(A \cap B) \div C$;
   b) $(A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B \cap C)$;
   c) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$;
   d) $(A\backslash B) \cup (B\backslash C)$.

3. Опишіть множини зображені на діаграмах Ейлера-Венна.

a)		b)	
c)		d)	

4. Довести, що
   a) $A\backslash B \subseteq A$;
   b) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cap C \subseteq B \cap C$;
   c) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A\backslash C \subseteq B\backslash C$.

5. Довести наступні теоретико-множинні тотожності:
   a) $A\backslash(B \cap C) \;=\; (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$;
   b) $(A \cup B)\backslash C \;=\; (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$;
   c) $A\backslash(A \cap B) \;=\; A\backslash B$;
   d) $(A\backslash B)\backslash C \;=\; (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$;
   e) $A\backslash(A \div B) \;=\; A \cap B$.

Завдання для самостійної роботи

1. Опрацювання матеріалів лекції.
2. Виконання домашнього завдання.
3. Опрацювання запропонованих додаткових джерел.

Контрольні запитання до теми 3

1. Кола Ейлера-Венна.
2. Операцій над множинами.
3. Основні співвідношення між операціями над множинами.

Посилання на відео лекції за темою № 3

Тема_3. Ч.1 –

https://drive.google.com/file/d/1XXkHNoBwAonAetDwSc4EA6BitisnYRus/view?usp=sharing

Тема_3. Ч.2 –

https://drive.google.com/file/d/1XXtA6XyTKzcoYbtuhTGKTmZft14Y28y2/view?usp=sharing

Тема 4. Бінарні відношення та операції над ними

4.1. Визначення відношення та його арність

Бінарні відношення - це ключовий термін у теорії відношень та теорії баз даних. Вони визначають спосіб, яким об'єкти однієї множини пов'язані з об'єктами іншої множини.

Основні характеристики бінарних відношень:

Дві множини: Бінарне відношення встановлює зв'язок між двома множинами об'єктів. Ці множини можуть бути будь-якого типу: люди та їх автомобілі, курси та студенти, товари та їх властивості тощо.

Пари об'єктів: Бінарні відношення виражаються у вигляді пар об'єктів, які мають певний взаємозв'язок або характеристики. Наприклад, відношення "студент - курс" може бути представлене парою (Іванов, Математика), (Петров, Фізика) тощо.

Правила співставлення: Бінарні відношення можуть мати різні правила співставлення між елементами двох множин. Це може бути один до одного відповідності, багато до одного, багато до багатьох тощо.

Ключові поля: У базах даних, бінарні відношення часто базуються на ключових полях, які ідентифікують унікальні об'єкти в множинах та визначають зв'язок між ними.

Бінарні відношення широко використовуються в теорії баз даних для моделювання реальних відносин між об'єктами. Вони допомагають організувати та аналізувати дані в базах даних, що дозволяє ефективно виконувати запити та отримувати потрібну інформацію.

Відношення використовуються для визначення будь-яких взаємозв'язків, якими характеризуються пари елементів множини.

Відношенням R множин A і B називається довільна підмножина $A\times B$

Якщо $(a, b) \in$ R, це записують як $a\mathbf{R}b$, при цьому кажуть, що a і b знаходяться у відношенні **R** (a відноситься до b)

Якщо $A = B$, то відношення є підмножиною $A\times A$, таке відношення називають **бінарним відношенням** на A

Відношення використовуються для визначення будь-яких взаємозв'язків, якими характеризуються пари елементів множини.

Якщо відношення **R** визначено на множині $A\times B$ ($R\subset A\times B$), то це означає, що у множину R потраплять тільки ті пари множини $A\times B$, між елементами яких має місце вказане відношення.

Бінарні відношення являються множинами, тому їх можна задавати використовуючи ті ж самі методи, що й для множин.

Крім того, бінарні відношення, задані на скінченних множинах можна задавати за допомогою матриць відношень та графів (діаграм) відношень.

Способи задання бінарних відношень

- Переліком елементів
- Характеристичною властивістю
- Матрицею (таблицею)
- Множиною точок на площині
- Діаграмою
- У вигляді графу

Задання переліком елементів

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$

$A\times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$R\subset A\times B$ – бінарне відношення множин A і B

$R = \{(1, b), (3, a), (3, b)\}$

$R = \{(1, a), (2, b)\}$

…

Всього $2^6 = 64$ різних відношення

Якщо $R = \{(1, b), (3, a), (3, b)\}$, то можна записати $1\mathbf{R}b$, оскільки $(1, b) \in R$

Задання характеристичною властивістю

$R \subset A \times B$ – бінарне відношення множин A і B

$R = \{(a, b) | \ a \in A, b \in B \}$

Переліком елементів:

$R = \{(4, 3), (5, 3), (5, 4), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$

Задання матрицею

Бінарне відношення $R \subset A \times B$, де

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$, може бути задане (m, n)-**матрицею** (таблицею) (m рядків, n стовпців), в якій елемент p_{ij}, що стоїть на перетині i-го рядка і j-го стовпця, дорівнює 1, якщо між елементами a_i і b_j має місце відношення R, або 0 в іншому випадку.

Приклад задання бінарного відношення матрицею

$R = \{(4, 3), (5, 3), (5, 4), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$

R	3	4	5	6	7
4	1	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0
6	1	1	1	0	0

Рис. 4.1. Бінарне відношення, задане матрицею

Задання множиною точок на площині

Якщо $R \subset A \times B$, A і B – числові множини, то відношення R можна зобразити як **множину точок на площині**, де кожна точка являє собою пару з множини R

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2),$
$(4, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

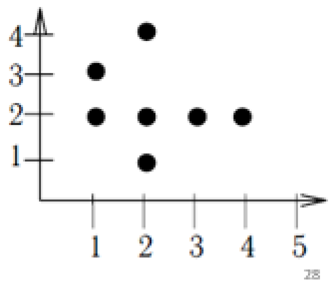


Рис. 4.2. Бінарне відношення, задане множиною точок

Задання діаграмою

Якщо $R \subset A \times B$, то відношення R можна зобразити у вигляді **діаграми**, що складається з вузлів і стрілок, при цьому вузлам взаємно однозначно відповідають елементи множин A і B, а стрілка з'єднує елемент a з елементом b тільки в тому випадку, якщо $(a, b) \in R$

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 1)\}$

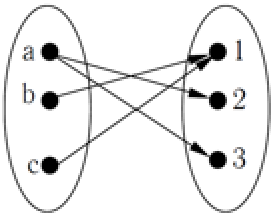


Рис. 4.3. Бінарне відношення, задане діаграмою

Задання у вигляді графу

Якщо $R \subset A \times A$, то бінарне відношення може бути задане у вигляді **графа**, вершини якого – елементи множини, а дуги направлені від a до b означають, що $(a, b) \in R$

$A = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a, c), (c, a), (b, a),$
$(b, b), (a, d)\}$

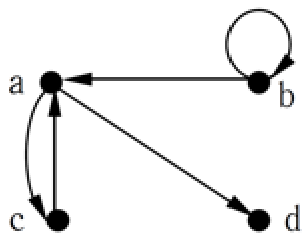


Рис. 4.4. Бінарне відношення, задане графом

Приклади бінарних відношень

1. $I_A = \{(x,x) | x \in A\}$ – **відношення рівності** на множині A x знаходиться у відношенні I_A з y або $x\ I_A\ y$ або $x = y$ або x рівне y

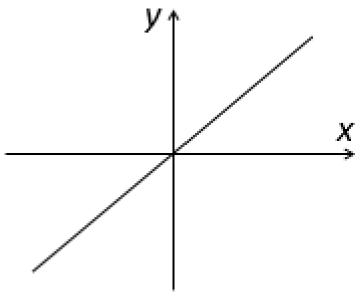


Рис. 4.5. Відношення рівності

2. $\boldsymbol{R}_{\le}=\{(x,y)|\ x\le y;\ x,y\in A\}$ – **відношення нестрогої нерівності *x*** знаходиться у відношенні $R_{\le}$ з ***y*** або $\boldsymbol{x}\ R_{\le}\ \boldsymbol{y}$ або $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}$ або ***x*** менше або рівне ***y***

3.

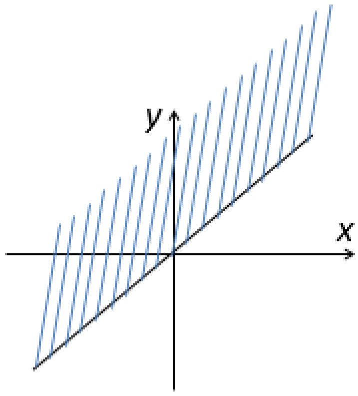


Рис. 4.6. Відношення нерівності

Приклад 1. *Q* бінарне відношення на ***A*** і ***B***

$\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B}$ знаходяться у відношенні ***Q*,** якщо (x,y)$\in\boldsymbol{Q}$

x знаходиться у відношенні Q з y $\Leftrightarrow$ xQy

A = {жінки}, B = {чоловіки}

$Q_{шлюб}\subset$ {жінки}$\times${чоловіки}

Приклад 2. Бінарні відношення на множині натуральних чисел:

1.Відношення “<=”:4*R*9, 5*R*5, 1*R*2

2.Відношення “ділиться на”: 49*R*7, 10*R*2

3.Відношення “складається з однакових цифр”:127*R*217

Тернарні відношення

T тернарне відношення на *A,B,C*

$T \subset A \times B \times C$

$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}$ знаходяться у відношенні ***T*,** якщо (x,y,z)$\in\boldsymbol{T}$

$\boldsymbol{A}$ = {жінки}, $\boldsymbol{B}$ = {чоловіки}, $\boldsymbol{C}$ = {діти}

$\boldsymbol{T}_{\text{бути матір'ю і батьком дитини}} \subset$ {жінки}×{чоловіки}×{діти}

n-арні відношення

$\boldsymbol{S}$ *n*-арне відношення на $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$

$\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \ldots \times \boldsymbol{A_n}$

$\boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{A_n}$ знаходяться у відношенні $\boldsymbol{S}$, якщо $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots \boldsymbol{x_n}) \in \boldsymbol{S}$

$\boldsymbol{S}_{\text{пропорція}} \subset \Re \times \Re \times \Re \times \Re$

$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \boldsymbol{S}_{\text{пропорція}} \Leftrightarrow a_1/a_2 = a_3/a_4$

4.2. Область визначення та область значень відношення

Область визначення бінарного відношення $R \subset A \times B$ це множина всіх елементів x, що належать множині A, для яких існує принаймні один елемент *y* у множині *B*, такий що пара (*x*, *y*) належить відношенню *R*

$\delta_R = \{x \in A | \exists\, y \in B\ (x, y) \in R\}$

Областю значень бінарного відношення $R \subset A \times B$ називається множина тих елементів $y \in B$, для яких існує $x \in A$, такий що $(x, y) \in$ R $\rho_R = \{y \in B | \exists\, x \in A\ (x, y) \in R\}$.

$Q_{\text{шлюб}} \subseteq$ {жінки}×{чоловіки}

δ_Q={заміжні жінки} ρ_Q={одружені чоловіки}

Приклади

$R = \{(1, 3), (2, 2), (1, 5), (4, 8), (5, 5)\}$

$\delta_R = \{1, 2, 4, 5\}$, $\rho_R = \{2, 3, 5, 8\}$

$F = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{D}, x^2 + y^2 = 4\}$

$\delta_R = \rho_R = \{x \mid -2 \le x \le 2\}$

$P = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}; x, y \ge 0; y = 2x + 3\}$

$\delta_R = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, x \ge 0\}$

$\rho_R = \{y \mid y \in \mathbf{Z}, y \ge 3\}$

4.3. Операції над відношеннями

Так як бінарне відношення є множиною, то для нього визначені всі операції, які визначені для множин: $\cap, \cup, \setminus, \div, \overline{}$

Крім того, визначаються інші операції над відношеннями:

R^{-1} – обернене відношення

$R \circ Q$ – добуток (композиція) відношень.

4.4. Обернене відношення

Нехай $R \subset A \times B$ є відношення на $A \times B$
Обернене відношення R^{-1} на $B \times A$ визначається наступним чином:
$R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$
$(b, a) \in R^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(a, b) \in R$ або
$b\mathbf{R}^{-1}a$ тоді і тільки тоді, коли $a\mathbf{R}b$.

Приклади оберненого відношення

- $R = \{(a, 3), (c, 2), (b, 5)\}$
  $R^{-1} = \{(3, a), (2, c), (5, b)\}$
- A – множина замків, B – множина ключів
  $P = \{(x, y) |$ y ключ, що відкриває замок $x\}$
  $P^{-1} = \{(x, y) |$ y замок, який відкриває ключ $x\}$
- $F = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{Z}; x, y \geq 0; y = 2x + 3\}$
  $F^{-1} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{Z}; x, y \geq 0; x = 2y + 3\}$

4.5. Композиція відношень

Нехай $R \subset A \times B$ – відношення на $A \times B$, а $Q \subset B \times C$ – відношення на $B \times C$

Композицією відношень *R* і *Q* називається відношення $T \subset A \times C$:
$T = \{(a, c) | a \in A, c \in C$ і $\exists\, b \in$ B $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in Q\}$

Множина позначається $T =$
$(a, c) \in$ тоді і тільки тоді, коли $\exists b$ $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in Q$

Приклад 1 композиції відношень

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{$☺, ☼$\}$, $C = \{w, x, y, z\}$

Нехай відношення $R \subset A \times B$ і $Q \subset B \times C$ задані в наступному вигляді:

$R = \{(1,$ ☺$), (3,$ ☼$)\}$

$Q = \{($☼$, z), ($☺$, y), ($☼$, x)\}$

$(1,$ ☺$) \in R$ і $($☺$, y) \in Q \Rightarrow (1, y) \in R \circ Q$

$(3,$ ☼$) \in R$ і $($☼$, z) \in Q \Rightarrow (3, z) \in R \circ Q$

$\dots$

$$R \circ Q = \{(1, y), (3, z), (3, x)\}$$

47

Приклад 2 композиції відношень

Для відношення $Q \subset A \times A$, знайти $Q \circ Q$

$$Q = \{(x, y) \mid x, y \in \mathrm{D}, y = 2x + 3\}$$

Нехай $(x, y) \in Q \circ Q$, тоді

$$\exists z\ (x, z) \in Q \text{ і } (z, y) \in Q$$

Враховуючи характеристики множини Q, для x, y, z можна записати

$$z = 2x + 3,\ \ y = 2z + 3 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot (2x + 3) + 3 = 4x + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q \circ Q = \{(x, y) \mid x, y \in \mathrm{D}, y = 4x + 9\}$$

Приклад 3 композиції відношень

Для відношень $Q, T \subset A \times A$, знайти $Q \circ T$

$$Q = \{(x, y) \mid x, y \in \mathrm{Z}, y = x + 1\}$$

$$T = \{(x, y) \mid x, y \in \mathrm{Z}, y = x^3\}$$

Нехай $(x, y) \in Q \circ T$, тоді

$$\exists z\ (x, z) \in Q \text{ і } (z, y) \in T$$

$$z = x + 1,\ \ y = z^3 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = (x + 1)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q \circ T = \{(x, y) \mid x, y \in \mathrm{Z}, y = (x + 1)^3\}$$

4.6. Властивості відношень

У математиці аналізують різноманітні взаємозв'язки між двома об'єктами, кожен з яких уявляється у певній множині X та представлений як множина пар. Таких відношень дуже багато. Чи можна провести класифікацію цих відношень? Так, для цього необхідно визначити найбільш типові властивості цих відносин.

Перелік властивостей відношень

Відношення		Визначення
Рефлексивності	+	$\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$
	–	$\exists x \in A\ (x, x) \notin R$
Іррефлексивності	+	$\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \notin R$
	–	$\exists x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$
Симетричності	+	$\forall x,y \in A\ \ (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
	–	$\exists x,y \in A\ \ (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R$
Антисиметричності	+	$\forall x,y \in A\ \ (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x=y$
	–	$\exists x,y \in A\ \ (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x \neq y$
Транзитивності	+	$\forall x,y,z \in A\ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$
	–	$\exists x,y,z \in A\ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \notin R$

Рис. 4.7. Властивості відношень

Розглянемо означення основних властивостей відношень

Означення. Відношення R на множині X вважається рефлексивним, якщо кожен елемент множини X утворює пару з самим собою у цьому відношенні R. Приклади рефлексивних відношень: «паралельність прямих», «рівність», «кратність».

Відношення «більше», «менше», «перпендикулярності» не є рефлексивними.

Діаграми відношень

Відношення **рефлексивне** тоді і тільки тоді, коли **для кожного** вузла на діаграмі існує стрілка-петля.

R = {**(a, a)**, **(b, b)**, **(c, c)**, **(d, d)**, (a, b), (c, b)}

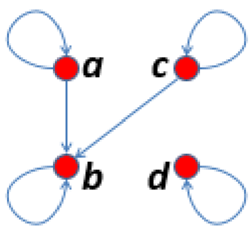


Рис. 4.8. Рефлексивне відношення

Відношення **не рефлексивне** тоді і тільки тоді, коли **є хоча б один** вузол **без** стрілки-петлі.

R = {**(*b*, *b*)**, **(*c*, *c*)**, **(*d*, *d*)**, (a, b), (c, b)}

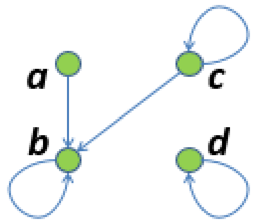


Рис. 4.9. Не рефлексивне відношення

Означення. Відношення R у множині X називається іррефлексивним (***антирефлексивним)***, якщо кожен елемент множини X не є у відношенні R сам до себе, інакше, , коли **жоден** вузол не має стрілки-петлі.

$R = \{(a, b), (a, c), (d, a)\}$.

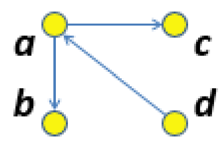


Рис. 4.10. Іррефлексивне відношення

Відношення **не іррефлексивне** тоді і тільки тоді, коли **є хоча б одна** стрілка-петля.

$R = \{(a, b), (c, a), (d, d)\}$

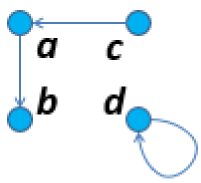


Рис. 4.11. Не іррефлексивне відношення

Приклади антирефлексивних відношень включають "більше" та "менше" у числових множинах, а також "перпендикулярність" у множині прямих на площині. У випадку антирефлексивного відношення відсутня петля в кожній вершині графа.

Означення. Відношення R на множині X називається симетричним, якщо для кожної пари (x, y), що належить R, також належить і її обернена пара (y,x). Приклади симетричних відношень: «паралельність», «перпендикулярність», «рівність». Якщо відношення симетричне, то на графі подвійна стрілка.

Відношення **симетричне**, коли **для кожної стрілки**, що з'єднує *два вузли*, також **існує** стрілка, що з'єднує два цих вузла **в зворотному напрямку**

R = {**(*a*, *b*), (*b*, *a*), (*a*, *c*), (*c*, *a*)**, (*d*, *d*)}

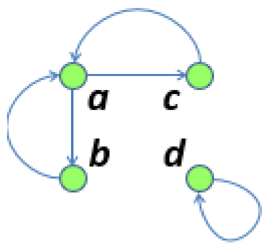


Рис. 4.12. Симетричне відношення

Відношення «більше». «менше». «довше» не є симетричними.

Означення. Відношення R на множині X вважається антисиметричним, якщо з того, що елемент x не належить до відношення R з елементом y і x не дорівнює y, не випливає, що елемент y належить до відношення R з елементом x. Приклади антисиметричних відношень: «більше», «менше», «подільності». Якщо відношення є антисиметричне, це значить, що на графі стрілка в один бік.

Відношення **антисиметричне**, коли **не існує** двох різних вузлів, зв'язаних **парою різноспрямованих** стрілок

$R = \{(b, a), (a, c), (c, d), (d, b)\}$

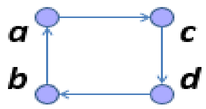


Рис. 4.13. Антисиметричне відношення

Відношення не антисиметричне, коли є два вузли, з’єднані двома різноспрямованими стрілками

***R* = {(*a*, *b*), (*a*, *c*), (*c*, *a*), (*a*, *d*), (*d*, *c*)}**

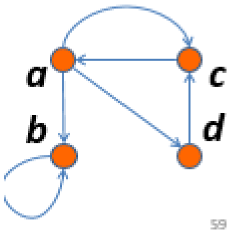


Рис. 4.14. Неантисиметричне відношення

Означення. Відношення R на множині X вважається транзитивним, якщо з того, що елемент x належить до відношення R з елементом y, а елемент y належить до відношення R з елементом z, випливає, що елемент x також належить до відношення R з елементом z. Приклади транзитивних відношень: «паралельність», «рівність», «подібність», «кратність».

Відношення **транзитивне**, коли для будь-яких **двох дуг**, таких, що одна спрямована від ***a* до *b***, а інша – від ***b* до *c***, **існує дуга**, яка з'єднує a і c у напрямку **від *a* до *c***

$R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$

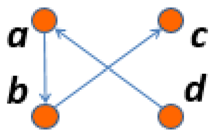


Рис. 4.15. Транзитивне відношення

Властивості матриць, що задають відношення

Матриця відношень на окремій множині А буде квадратною:

- у матриці, що задає рефлексивне відношення, кожний елемент головної діагоналі дорівнює 1
- матриця симетричного відношення буде симетричною $M(i,j) = M(j, i)$.

Аудиторне завдання

1. Знайти область визначення та область значень бінарних відношень:
   e. $R = \{(1, b), (1, c), (3, a), (7, a), (4, c)\}$;
   f. $F = \{(2, 3), (4, 6), (8, 12), (16, 24), \dots\}$;
   g. $G = \{(x, y) |\ y = 3 \cdot \sin(x)\}$;
   h. $H = \{(x, y) |\ x, y \in D, x = y^2\}$.

2. Нехай множина $A = \{a, b, c, d\}$, а R, F, G і H – відношення на A, визначені наступним чином:

$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (c, d), (c, a)\}$,

$F = \{(a,b),(b,d),(a,c),(d,c)\}$,
$G = \{(a,b),(a,a),(d,b),(b,a),(c,c),(c,a),(b,b),(b,d),(d,d)\}$,
$H = \{(a,d),(b,d),(c,c),(c,a),(d,b),(a,a),(a,c),(d,a)\}$.

a) Опишіть $R \cap G$;
b) Опишіть $F \cup R$;
c) Опишіть $G \backslash H$;
d) Опишіть $H \div R$.

3. Нехай $R \subset A \times B$, $F \subset B \times C$, $G \subset C \times D$ – бінарні відношення, визначені наступним чином $R = \{(1,3),(5,7),(3,7),(6,7),(4,8)\}$, $F = \{(7,12),(8,15),(6,1),(3,10),(10,3),(7,11)\}$, $G = \{(15, ☺),(10, ☼),(12, ☼),(11, \#),(10, @)\}$. Визначити наступні відношення:
   a) R^{-1};
   b) $F \circ G$;
   c) $G \circ G^{-1}$;
   d) $(R \circ F) \circ G$;
   e) $R^{-1} \circ F^{-1}$;
   f) $R \circ G$.

4. Для відношення $R \subset A \times A$ визначеного як $R = \{(x,y) |\ x, y\ \in D,\ y = 2x^2 + 1\}$
   a) Опишіть відношення R^{-1};
   b) Опишіть відношення $R \circ R$;
   c) Опишіть відношення $R^{-1} \circ R$;
   d) Опишіть відношення $R \circ R^{-1}$.

5. Задати у вигляді діаграми наведені нижче відношення та визначити їх властивості:
   a) $R_1 = \{(a,a),(a,b),(b,a)\}$;
   b) $R_2 = \{(b,b),(b,c),(c,b),(b,d)\}$
   c) $R_3 = \{(a,b),(b,d),(a,c),(d,c)\}$;
   d) $R_4 = \{(a,b),(a,a),(d,b),(b,a),(c,c),(c,a),(b,b),(b,d),(d,d)\}$;

6. Нехай множина $A = \{w,x,y,z\}$.
   a) Побудувати рефлексивне, антисиметричне, але не транзитивне бінарне відношення на множині A;
   b) Побудувати іррефлексивне, транзитивне і симетричне бінарне відношення на множині A.

7. Нехай множина $A = \{1, 2, 3\}$, а R і H – відношення на A. Встановить істинність або хибність кожного з наведених нижче висловлювань. Для кожного висловлювання навести контрольний приклад.
   a. Якщо відношення R і H рефлексивні, то відношення $R \cap H$ завжди рефлексивне;
   b. Якщо відношення R і H симетричні, то відношення $R \cup H$ завжди симетричне;
   c. Якщо відношенняR і H антисиметричні, то відношення $R \circ H$ завжди антисиметричне;
   d. Якщо відношення R і H транзитивні, то відношення $R \backslash H$ завжди транзитивне.

Домашнє завдання

1. Знайти область визначення та область значень бінарних відношень:
   f) $S = \{(x, y)|\ x, y \in Z, x^4 + y^4 \leq 16\}$
   g) $L = \{(x, y)|\ 0 \leq x, y \leq 12, x > 3y\}$

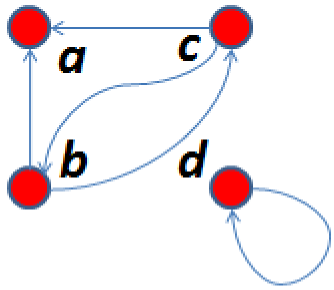
2. Нехай $R \subset A \times B$, $F \subset B \times C$, $G \subset C \times D$ – бінарні відношення, визначені наступним чином $R = \{(a, 5), (b, 3), (6, d), (c, 7), (d, 8), (2, b)\}$, $F = \{(6, a), (8, d), (b, 1), (2, c), (d, 3), (7, b)\}$, $G = \{(a, \text{☺}), (b, \text{☼}), (c, \text{☼}), (d, \#), (b, @)\}$. Визначити наступні відношення:
   a. $R \circ F^{-1}$;
   b. $(F \circ R)^{-1}$;
   c. $(F \circ R^{-1}) \circ G$;
   d. $(R \circ G) \circ G^{-1}$;
   e. $(F^{-1} \circ R) \circ (F \circ G)$;
   f. $(F \circ F^{-1}) \circ (G^{-1} \circ R)^{-1}$.

3. Для відношень $G, H \subset A \times A$ визначених як $G = \{(x, y)|\ x, y\ \in D,\ y = x^2 - 3\}$,
   $H = \{(x, y)|\ x, y\ \in D, y = x + 2\}$
   a) Опишіть відношення G^{-1};
   b) Опишіть відношення H^{-1};
   c) Опишіть відношення $G \circ H$;
   d) Опишіть відношення $H \circ G$;
   e) Опишіть відношення $G^{-1} \circ H$;

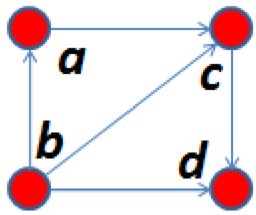
f) Опишіть відношення $G \circ H^{-1}$.

4. Описати переліком елементів наведені нижче відношення та визначити їх властивості:

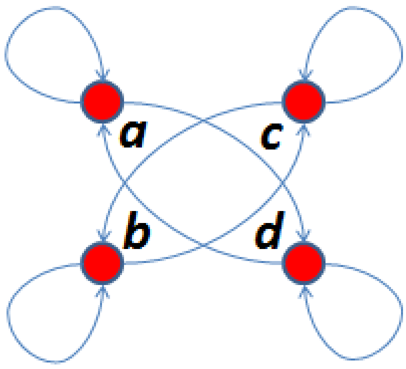
a.



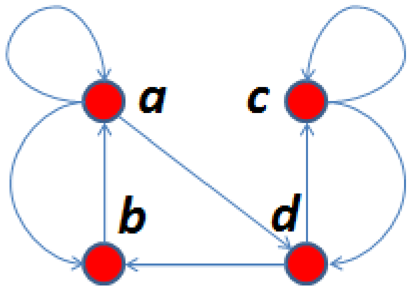
b.



c.



d.



5. Нехай множина $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
   a. Побудувати рефлексивне, симетричне і транзитивне бінарне відношення на множині A;
   b. Побудувати не іррефлексивне, не антисиметричне і не симетричне бінарне відношення на множині A.

6. Нехай множина $A = \{a, b, c\}$, а F і G – відношення на A. Встановить істинність або хибність кожного з наведених нижче висловлювань. Для кожного висловлювання навести контрольний приклад.
   a. Якщо відношення F і G рефлексивні, то відношення $F \div G$ завжди рефлексивне;
   b. Якщо відношення F і G симетричні, то відношення $F \circ G$ завжди симетричне;
   c. Якщо відношення F і G антисиметричні, то відношення $F \cap G$ завжди антисиметричне;
   d. Якщо відношення F і G транзитивні, то відношення $F \backslash G$ завжди транзитивне.

Завдання для самостійної роботи

1. Опрацювання матеріалів лекції.
2. Виконання домашнього завдання.
3. Опрацювання запропонованих додаткових джерел.

Контрольні запитання до теми 4

1. Визначення бінарного відношення
2. Операції над бінарними відношеннями
3. Властивості бінарних відношень

Посилання на відео лекції за темою № 4

Тема_4. Ч.1 –

https://drive.google.com/file/d/1XXzIAmXDAF-ryFWxhSFpJsZUIBYnSkDP/view?usp=sharing

Тема_4. Ч.2 -
https://drive.google.com/file/d/1XYMUERsGn8EMAFyihqp2VF2h4_Rg6W1z/view?usp=sharing

Тема 5. Спеціальні класи бінарних відношень. Функції

5.1. Відношення порядку

Одним з ключових термінів у науці та практиці є поняття порядку, яке є загальним поняттям для таких ідей, як "старшинство", "підпорядкованість", "наслідування", "послідовність", "важливість", "менше", "більше", "не перевищує" та інші подібні концепції.

Як слово «порядок» використовується в повсякденному житті?

Приклад: П'ять студентів різної зростової структури збираються. Завдання: розташувати їх у певному порядку так, щоб встановити відношення порядку "бути вищим".

Які властивості має дане відношення?

Означення. Відношення R на множині X вважається відношенням порядку, якщо воно має властивості транзитивності і антисиметричності.

Виділяють певні види відношень порядку. Відношення порядку на множині називається:

– відношенням нестрогого порядку, якщо воно рефлексивне;

– відношенням строгого порядку, якщо воно антирефлексивне.

Відношення часткового порядку

Відношення часткового порядку узагальнює поняття нерівності.

Множина із заданим на ній відношенням порядку називається впорядкованою множиною. Залежно від типів відношень порядку, визначають різні види впорядкованих множин. Одна й та ж множина може мати різний порядок. Наприклад, множинуа натуральних чисел може бути упорядкована за допомогою наступних відношень::

– відношення «ділиться на» є відношенням нестрогого порядку;

– відношення «менше» є відношенням строгого порядку;

Означення. Відношення часткового (нестрогого) порядку на множині X - це відношення R, яке є рефлексивним, транзитивним та антисиметричним.

1. $a\ R\ a$ для всіх a Є M (рефлексивність),

2. Якщо $a\ R\ b$ і $bR\ a$, то $a = b$ (антисиметричність),

3. Якщо $a\ R\ b$ і $b\ R\ c$, то $a\ R\ c$ (транзитивність).

Множина M, яка має визначений частковий порядок, називається частково впорядкованою множиною.

Елементи a, b Є M назвемо ***порівнюваними*** за відношенням R, якщо виконується $a\ R\ b$ або $b\ R\ a$.

Відношення строгого порядку

Відношення строгого порядку узагальнює поняття СТРОГО МЕНШЕ

Відношенням строгого порядку називають **іррефлексивне**, **антисиметричне** та **транзитивне** бінарне відношення на множині A

Приклад відношення строгого порядку - відношення СТРОГО МЕНШЕ (<) на множині ***D*** (дійсних чисел)

Діаграма Хассе

Якщо множина кінцева і на ній задано відношення порядку (часткового або строгого), ця множина може бути зображена за допомого діаграми Хассе.

Якщо задано відношення *aRb*, то елемент *a* називається безпосереднім попередником для *b* і зображається на діаграмі нижче *b*.

Розглянемо відношення *a* ДІЛИТЬ *b* на множині A = {1, 2, 3, 6, 12, 18}.

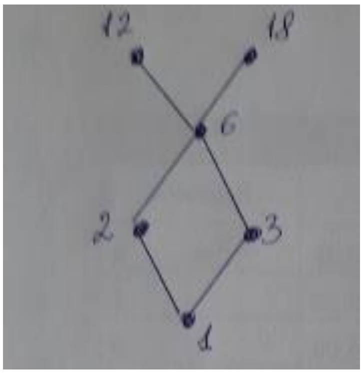


Рис. 5.1. Діаграма Хассе

1 у відношенні з 2, 3, 6, 12, 18. 2 у відношенні з 6, 12, 18.

2 і 3 не порівнювані, 12 і 18 не порівнювані.

Значить на даній множині встановлено частковий порядок, деякі елементи можна порівнювати, деякі ні.

Розглянемо відношення ВКЛЮЧЕННЯ (є підмножиною)

$A \subseteq B$

Розглянемо множину A = {1, 2, 3}

BA= { $\varnothing$ }, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}

Діаграма Хассе для заданого відношення має вигляд:

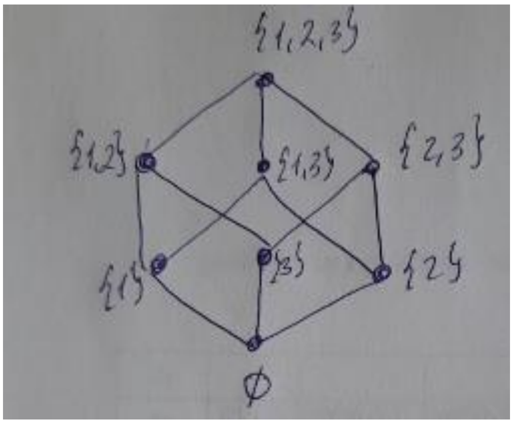


Рис. 5.2. Діаграма Хассе

Відношення лінійного порядку

Лінійно впорядкована множина M - це така множина, де будь-які два елементи можуть бути порівняні між собою. Також її можна назвати ланцюгом. Відповідне відношення R, яке визначено на лінійно впорядкованій множині, називається лінійним (досконалим) порядком. Відношення R на множині M вважається відношенням лінійного порядку, якщо воно має властивості:

1. $a\ R\ a$ для всіх $a \in M$ (рефлексивність),
2. Якщо $a\ R\ b$ і $bR\ a$, то $a = b$ (антисиметричність),
3. Якщо $a\ R\ b$ і $b\ R\ c$, то $a\ R\ c$ (транзитивність).
4. порівнюване, тобто для будь-якої пари елементів $a, b \in M$ виконується $a\ R\ b$ або $b\ R\ a$.

Якщо кожні два елементи частково впорядкованої множини (A, ≤) порівнювані, то (A, ≤) називається **лінійно впорядкованою множиною**, або **ланцюгом,** тобто для будь-якого x і y можна сказати, який з них попередній, а який наступний.

В умовах попереднього прикладу виділимо підмножини множини А, на яких встановлено лінійний порядок

B = {1 ,2, 6, 18}

B = {1, 3, 6, 18}

B = {1, 3, 6, 12}

Тобто для будь-яких двох елементів, можна сказати який з них попередній, а який наступний.

Приклад ланцюга

Нехай $x, y \in$ D, $R \subset A \times A$ – відношення, визначене умовою $(x, y) \in$ R, якщо x менше або рівне y

Рефлексивне: $x \in A \Rightarrow x \leq x$

Антисиметричне: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

Транзитивне: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Порівнюване: $x, y \in A \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x$

5.2. Відношення еквівалентності

Відношенням еквівалентності на множині А називають рефлексивне, симетричне та транзитивне бінарне відношення на множині A

1. $a\ R\ a$ для всіх $a \in M$ (рефлексивність),

2. З $a\,R\,b$ -> $bR\,a$, (симетричність),
3. Якщо $a\,R\,b$ і $b\,R\,c$, то $a\,R\,c$ (транзитивність).

Приклад відношення еквівалентності

R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (2,4), (4,2)}

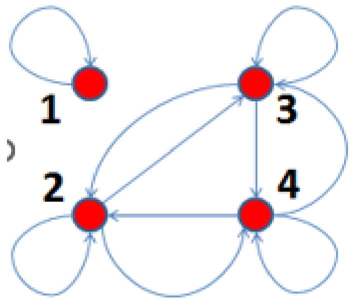


Рис. 5.3. Відношення еквівалентності

Приклад 1.Відношення "РІВНІСТЬ" на множині натуральних чисел
Рефлексивне: a = a
Симетричне: якщо $a = b$, то $b = a$
Транзитивне: якщо $a = b$, а $b = c$, то a = c.
Відношення еквіваленості узагальнює поняття рівності.

Приклад 2. Відношення "бути однокурсником"
Рефлексивне – студент є однокурсником самого себе
Симетричне – якщо a – однокурсник b, то b є однокурсником a
Транзитивне - якщо a – однокурсник b, а b є однокурсником c, то а – однокурсник c.

Відношення еквівалентності розбиває множину на підмножини

Розбиттям множини А називається сукупність А1, А2, ……, An таких, що при об'єднанні отримуємо вхідну множину.

Розбиття множини на підмножини - це процес розподілу елементів множини на підгрупи таким чином, що кожен елемент належить хоча б до однієї підмножини. Це може бути корисним для різних задач аналізу, комбінаторики, та оптимізації.

Наприклад, розбиття множини натуральних чисел на парні та непарні числа є одним з найзвичайніших прикладів.

В іншому прикладі, множину студентів у класі можна розбити на підмножини за оцінками або за іменами.

$$A = \{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\}$$

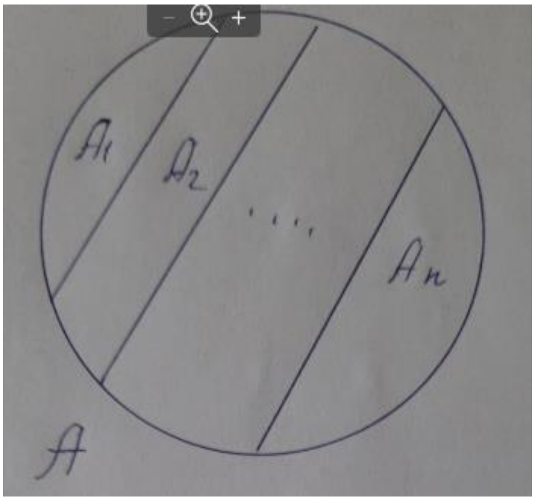


Рис. 5.4. Розбиття множини А на підмножини

Класи еквівалентності

Відношення “бути однокурсником” розбиває множину на 5 класів, які не перетинаються.

Студенти 1 курсу
Студенти 2 курсу
Студенти 3 курсу
Студенти 4 курсу
Студенти 5 курсу

5.3. Класи еквівалентності

Відношення еквівалентності R на множині A розбиває його на **класи еквівалентності** (підмножини), елементи яких еквівалентні один одному і не еквівалентні елементам інших підмножин

Класом еквівалентності елемента $\boldsymbol{x}$ по відношенню еквівалентності $\mathbf{R}\subset \boldsymbol{A}\times \boldsymbol{A}$ називається множина елементів з $\boldsymbol{A}$, еквівалентних $\boldsymbol{x}$ (включаючи сам $\boldsymbol{x}$)

$[x]_{\mathrm{R}} = \{y \in A | (x, y) \in \mathrm{R}\}$

$[A]_{\mathrm{R}}$ – множина всіх класів еквівалентності множини A по відношенню R.

Приклад класів еквівалентності

Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$

R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (2,4), (4,2)} – відношення еквівалентності.

Визначити $[A]_{\mathrm{R}}$

Класи еквівалентності по відношенню R отримуються шляхом визначення класу еквівалентності **кожного елемента** множини A

$$[1]_R = \{y \in A \mid (x, y) \in R\} = \{1\}$$
$$[2]_R = \{y \in A \mid (x, y) \in R\} = \{2, 3, 4\}$$
$$[3]_R = \{y \in A \mid (x, y) \in R\} = \{3, 2, 4\}$$
$$[4]_R = \{y \in A \mid (x, y) \in R\} = \{4, 3, 2\}$$

$$[1]_R = \{1\}$$
$$[2]_R = [3]_R = [4]_R = \{2, 3, 4\}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{[A]_R = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}}$$

Зауваження:

Будь-який **елемент** класу еквівалентності **породжує клас** еквівалентності

$b \in [a] \Rightarrow [a] = [b]$

(будь-який елемент класу еквівалентності являє клас)

Кожен **клас** еквівалентності містить принаймні **один елемент**, тому, в силу рефлексивності відношення, множина всіх елементів, еквівалентних елементу a, повинна містити a

Ніякий елемент **не може належати** двом різним класам еквівалентності

5.3. Розбиття

Сукупність класів еквівалентності розділяє **всю множину** A на **непорожні підмножини**, що **не перетинаються**

(ніякі дві з них не мають спільних елементів)

Таке розділення множини A називається її **розбиттям**

Множина $\{A_i\}$ називається **розбиттям** A, якщо виконуються умови:

- $A_i \cap A_j = \varnothing$
- $A = \bigcup_{i \in K} A_i$

5.4. Функції

Функція - це математичне поняття, яке описує взаємозв'язок між елементами множин.

Тобто, це закон, за яким кожному елементу однієї множини (область визначення) ставиться у відповідність певний елемент іншої множини (область значень)

Функція – це окремий випадок бінарних відносин, на які накладено додаткові обмеження

У графічних термінах функція описується таким графом, у якого з кожної вершини, що зображає елементи множини, виходить рівно одна стрілка.

Наприклад, граф, який представляє функцію із множини {a,b,c} до {1, 2}, що складається із пар (a,1), (b,1). (c,2) має вигляд:

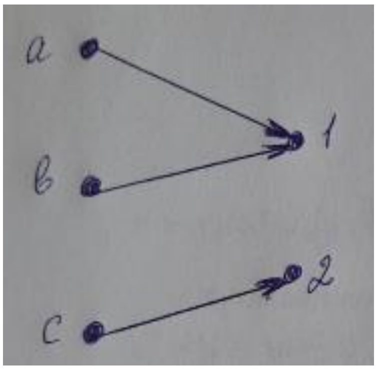


Рис. 5.5. Граф, який представляє функцію

Теоретико-множинне визначення функції

Відношення $F \subset A \times B$ називається **функцією (відображенням)** з A в B і позначається через F: $A \to B$, якщо для кожного $a \in A$ існує єдиний елемент $b \in B$ такий, що $(a, b) \in F$ (F відображає A в B). Якщо F: $A \to B$ – функція, і $(a, b) \in F$, то $b = F(a)$ (елемент a відображається в елемент b).

Приклад функції

Нехай $A = \{w, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і R,H$\subset A \times B$

R = {(w, 3), (y, 1), (z, 2), (x, 1), (w, 4)}

H = {(w, 1), (x, 3), (z, 3), (y, 5)}

Яке з наведених відношень є функцією з A в B?

H – функція, так як $H \subset A \times B$ і кожен з елементів A присутній в якості першої компоненти впорядкованої пари з H рівно один раз.

Область визначення та область потенційних значень функції

$$F: A \to B$$

Множина A називається областю визначення функції F, а множина B називається областю потенційних значень.

5.5. Образи та прообрази

Нехай F: $A \to B$

Образом множини $C \subset A$ будемо називати множину всіх образів елементів множини C: $F(C) = \{b \in B | \exists\ c \in C\ \ F(c) = b\}$

Прообразом множини $D \subset B$ будемо називати множину всіх прообразів елементів множини D $F^{-1}(D) = \{a \in A | \exists\ d \in D\ \ F(a) = d\}$

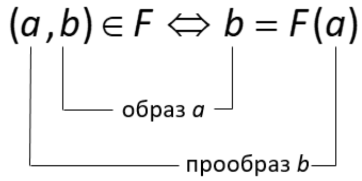


Рис. 5.6. Образ та прообраз

Приклад образу та прообразу

Нехай $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
F: $A \to B$ − функція визначена співвідношенням $F(x) = x^2 - 1$

Приклад 1. Якщо $C = \{1, 2\} \subset A$, то образ C при відображенні F:

$F(C) = \{b \in B | \exists\ c \in C\ \ F(c) = b\} = \{0, 3\}$
$c = 1 \Rightarrow F(1) = 1^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow\ 0 \in b$
$c = 2 \Rightarrow F(2) = 2^2 - 1 = 3 \ \Rightarrow\ 3 \in b$

Приклад 2. Нехай $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
F: $A \to B$ − функція визначена співвідношенням
$F(x) = x^2 - 1$

Якщо $D = \{0, 1, 3, 5\} \subset B$, то прообраз D при відображенні F:

$F^{-1}(D) = \{a \in A | \exists\ d \in D\ \ F(a) = d\} = \{-2, -1, 1, 2\}$
$a = -2 \Rightarrow F(-2) = (-2)^2 - 1 = 3 \ \Rightarrow\ -2 \in F^{-1}(D)$
$a = -1 \Rightarrow F(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow\ -1 \in F^{-1}(D)$
$a = 0 \Rightarrow F(0) = (0)^2 - 1 = -1 \ \Rightarrow\ -1 \notin F^{-1}(D)$
$a = 1 \Rightarrow F(1) = (1)^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow\ 1 \in F^{-1}(D)$
$a = 2 \Rightarrow F(2) = (2)^2 - 1 = 3 \ \Rightarrow\ 2 \in F^{-1}(D)$

Область значень функції

Образ всієї множини A називається **областю значень** функції F: $A \to B$.

Приклад
Нехай $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$F : A \to B$ – функція визначена співвідношенням $F(x) = x + 2$
$F(A) = \{b \in B | \exists\ a \in A\ \ F(a) = b\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

5.7. Композиція функцій

Теорема про композицію функцій
Нехай F: $A \to B$ і G: $B \to C$
Композиція функцій F і G є функцією з A в C
$F \circ G$ $A \to C$
Якщо $a \in A$, то $(F \circ G)(a) = F(G(a))$
Композиція функцій асоціативна
Нехай F: $A \to B$, G: $B \to C$ і H: $C \to D$
Тоді $H \circ (F \circ G) = (H \circ G) \circ F$

Приклад композиції функцій

Нехай $F(x) = \sqrt{x+1}$ і $G(x) = x + 2$ – функції, $x \in$ D

$$F(G(x)) = F(x+2) = \sqrt{x+2+1} = \sqrt{x+3}$$
$$G(F(x)) = G(\sqrt{x+1}) = \sqrt{x+1} + 2$$

5.8. Класифікація відображень. Властивості функцій

Функція F: $A \to B$ називається:

Ін’єктивною (**ін’єкцією** або **відображення «в»**), якщо з $F(a) = F(a')\Rightarrow a = a'$

Сюр’єктивною (**сюр’єкцією** або **відображення «на»**), якщо $\forall\ b \in B\ \ \exists\ a \in A$ таке, що $F(a) = b$

Бієктивною (**бієкцією** або **взаємно однозначне відображення**), якщо функція одночасно ін’єктивна і сюр’єктивна

Перестановкою множини A, якщо $A = B$ і
F: $A \to B$ є взаємно однозначним відображенням

Приклад 1
Нехай $A,B \in$ D і F: $A \to B$ визначена, як: $F(x) = 2x + 3$

- $F(a) = F(a') \Rightarrow 2a + 3 = 2a' + 3 \Rightarrow a = a' \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ – ін'єктивна

- $\forall\, b \in B\ \ \exists\, a \in A$ таке, що $F(a) = b = 2a + 3$

F – сюр'єктивна

Із 1 і 2 $\Rightarrow F$ – бієктивна

Приклад 2

Нехай $A,B \in$ D і F: $A \to B$ визначена, як: $F(x) = x^2$

$F(a) = F(a') \Rightarrow F(3) = F(-3)$, але $3 \neq -3 \Rightarrow \Rightarrow F$ – не ін'єктивна

Не існує $a \in$ D, для якого $F(a) = -2 \Rightarrow F$ – не сюр'єктивна

Якщо $A,B \in$ D і $A,B \geq 0$ то F – ін'єктивна і сюр'єктивна

5.8. Обернене відображення (обернена функція)

Нехай F: $A \to B \Rightarrow F \subset A\times B$, так як F є відношенням на $A\times B$

Обернене відношення $F^{-1} \subset B\times A$ визначається наступним чином:

$F^{-1} = \{(b, a)|\ (a, b)\in R\}$

При цьому відношення F^{-1} **може не бути функцією** з B в A, навіть якщо F є функцією з A в B

Приклади обернених функцій

$$y = x^3 \leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$y = 10^x \leftrightarrow x = \lg y$$

Аудиторне завдання

1. Чи буде R – відношенням часткового порядку на множині A?

  e. $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(3,3),(1,2),(3,1)\}$, $A = \{1,2,3\}$;

  f. $R = \{(2,3),(3,3),(1,1),(3,2),(2,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$, $A = \{1,2,3\}$;

  g. $R = \{(x,y)|\ x,y \in A, x$ ділить націло $y\}$, $A \in Z$;

  h. $R = \{(x,y)|\ x,y \in A, x$ старше $y\}, A$ – множина людей.

2. Встановіть, які з перелічених відношень є відношеннями еквівалентності на множині A.

  a. $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c),(b,c),(b,d),(c,d),(c,a)\}$, $A = \{a,b,c,d\}$;

  b. $F = \{(a,b),(b,c),(a,c),(c,c),(c,b),(c,a),(a,a),(b,a),(b,b)\}$, $A = \{a,b,c\}$;

c. $G = \{(x, y) |\ x, y \in A, x + y = 5\}, A \in Z$;
d. $H = \{(x, y) |\ x, y \in A, x^2 = y^2\}, A \in [-5; 5]$;
e. $T = \{(x, y) |\ x, y \in A, x + y$ парне$\}, A \in [1; 8]$.

3. Для кожного відношення еквівалентності з попереднього завдання побудуйте класи еквівалентності.

4. Які з наведених нижче сукупностей елементів складають розбиття множини $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$?
   e) $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{e, f\}\}$;
   f) $\{\{a, b, c\}, \{d, c\}, \{e\}, \{f\}\}$;
   g) $\{\{a, c\}, \{d, e, b, f\}\}$;
   h) $\{\{a, b, c\}, \{e, f\}\}$;
   i) $\{\{a, c\}, \{d, e, b\}, \{f\}\}$;
   j) $\{\{a, b, c, d, e, f\}\}$.

5. Нехай $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, C = \{1, 3, 4\}$ і $D = \{2, 5, 7, 8\}$. Функція $F: A \to B$ визначена співвідношенням $F(x) = 2x - 1$. Знайти образ множини C та прообраз множини D при відображенні F.

6. Нехай $F(x) = 2x, G(x) = \lg x, H(x) = x^3$. Знайти
   c) $F \circ G$;
   d) $G \circ F$;
   e) $H \circ G \circ F$.

7. Нехай множини $A, B \in \mathrm{D}$. Визначити, чи буде функція $F: A \to B$ ін'єктивною, сюр'єктивною, бієктивною і перестановкою.
   a. $F(x) = x - 3$;
   b. $F(x) = |x| + 1$.

Домашнє завдання

1. Чи буде H – відношеннями часткового порядку на множині A.

$H = \{(a, a), (b, c), (c, d), (b, b), (c, c), (c, a), (a, b), (d, a)\}, A = \{a, b, c, d\}$;

$H = \{(w, x), (x, x), (x, z), (y, y), (z, y), (w, w), (w, y), (z, z), (w, z)\}, \quad A = \{w, x, y, z\}$;

$H = \{(x, y) |\ x, y \in Z, 2x \geq 3y\}, A \in Z$;

$H = \{(x, y) |\ x, y \in A, x$ не молодше $y\}, A$ $-$ множина людей.

2. Встановіть, які з перелічених відношень є відношеннями еквівалентності на множині A.

$R =$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(3,4),(4,3)\}$,
$A = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$G = \{(x, y) |\ x, y \in A, x + y = 0\}, A \in Z;$$
$$H = \{(x, y) |\ x, y \in A, x = y\}, A \in [-7; 7];$$

F
$= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(1,3),(3,c),(a,d),(b,4),$
$(1,c),(c,1),(c,3),(d,a),(4,b),(3,1)\}, A = \{1,2,3,4,a,b,c,d\}$.

Для кожного відношення еквівалентності з попереднього завдання побудуйте класи еквівалентності.

3. Для наведених сукупностей, що складають розбиття множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, перерахуйте елементи відповідного відношення.

$\{A_i\} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$;

$\{A_i\} = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$;

$\{A_i\} = \{\{1,3\},\{5\},\{4,2\}\}$;

$\{A_i\} = \{\{1\},\{2,3,4\},\{5\}\}$;

$\{A_i\} = \{\{1,2,3,4,5\}\}$.

4. Нехай $A = \{-4, -3, -1, 1, 4, 8\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Функція $F\colon A \to B$ визначена співвідношенням $F(x) = |x| + 1$. Знайти область значень функції F.

5. Нехай множини $A, B \in \mathrm{D}$. Визначити, чи буде функція $F\colon A \to B$ взаємно однозначним відображенням.

$F(x) = x^3$;

$F(x) = x(x-1)(x+1)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Опрацювання матеріалів лекції.
2. Виконання домашнього завдання.
3. Опрацювання запропонованих додаткових джерел.

Контрольні запитання до теми 5

1. Визначення відношення часткового та лінійного порядку
2. Відношення еквівалентності та його властивості
3. Розбиття
4. Класи еквівалентності
5. Визначення функції
6. Класифікація функцій
7. Обернена функція
8. Образ та прообраз множини
9. Властивості функцій
10. Обернена функція.

Посилання на відео лекції за темою № 5

Тема_5. Ч.1 - https://drive.google.com/file/d/1XZyboFLmhvaTOysIEKUKD2HLDzFK4WhZ/view?usp=sharing

Тема_5. Ч.2 - https://drive.google.com/file/d/1X_nRm1rYYKf5DphaMNnz3jFZN_0WlOWN/view?usp=sharing

Тема 6. Комбінаторний аналіз

6.1. Історична довідка

Комбінаторний аналіз - це галузь математики, що вивчає різні комбінаторні структури і методи їх аналізу. Він займається вивченням розміщень, перестановок, комбінацій, теорії графів та інших об'єктів, що виникають при вивченні комбінаторних задач.

Історично, комбінаторний аналіз розвивався з давніх часів у різних культурах. Наприклад, в Давньому Китаї вже в III столітті до н.е. існували різні комбінаторні методи, які застосовувалися для розв'язання задач у гральній теорії та інших областях.

Протягом історії розвитку математики, комбінаторний аналіз отримав значний імпульс у XVII-XVIII століттях завдяки роботам таких вчених, як Блез Паскаль, Леонард Ейлер та Готфрід Вільгельм Лейбніц. Вони вивчали комбінаторні структури, вирішували різноманітні задачі та внесли вагомий внесок у розвиток цієї галузі.

Сучасний комбінаторний аналіз є важливою галуззю математики і знаходить широке застосування у різних областях, включаючи криптографію, комп'ютерні науки, оптимізацію та інші.

Приклад: В кіоску продаються 4 види конвертів і 5 видів марок. Студенту вистачає грошей тільки на 1 конверт і 1 марку. Скількома способами студент може придбати конверт або марку.

Відповідь: 9 способів.

Узагальнемо цей приклад:

Нехай множина Х – множина конвертів, У – множина марок.

Ці множини кінцеві і не перетинаються.

Тоді вибрати 1 елемент з множини X або з множин У можна такою кількістю способів | X | + | Y |.

Це принцип додавання. В теорії ймовірності цей принцип формулюється наступним чином: нехай 2 дії взаємовиключають одна одну, причому одне з них може бути виконане m способами, а інше, n способами. Тоді будь-яка одна з цих дій можна виконати m+n способами.

Нехай у студента з'явились гроші і він може купити і конверт і марку.

Скількома способами студент може купити і конверт і марку? Для кожного способу вибору конверта існує 5 способів вибора марки.

Відповідь: 5*4=20 способів

Узагальненням такої задачі є принцип добутку.

Нехай одно за другим треба виконати k дій. Перша дія може бути виконана $m1$ способами, друга дія може бути виконана $m2$ способами, …, k-та дія може бути виконана mk способами. Тоді k дій може бути виконано $m_1 * m_2 * m_3 * \dots * m_k$ способами.

6.2. Правила суми та добутку

Правило суми (додавання)

Якщо об'єкт А можна вибрати *m* різними способами, а об'єкт В можна вибрати *n* різними способами, причому результати вибору об'єктів А і В ніколи не співпадають, то вибір «А або В» можна здійснити $m + n$ різними способами

Або, якщо *дві взаємовиключні події* можуть бути виконані відповідно k та m способами, тоді якусь одну з цих подій можна виконати $k+m$ способами

Задача про Вовочку маленького

Вовочка може їсти манну кашу або великою, або маленькою ложкою На кухні є дві різних великих (золота та срібна) і три маленьких (інкрустовані бурштином, ізумрудами, топазами) ложечки Скількома різними способами Вовочка може обрати собі ложку?

Відповідь: 2 великих + 3 маленьких = 5 способів.

Задача про Вовочку ласуна

В кондитерській під кінець дня залишилося чотири сорти заварних тістечок, три сорти шоколадних і три сорти фруктових Скількома способами Вовочка може купити одне тістечко?

Відповідь: 4 заварних + 3 шоколадних + 3 фруктових = 10 способів

Правило добутку (множення)

Нехай об'єкт А можна вибрати *n* різними способами, після кожного вибору об'єкта А об'єкт В можна вибрати *m* різними способами, тоді вибрати «А та В» (впорядковану пару об'єктів) можна $n \cdot m$ різними способами.

Допустимо, що є дві послідовні дії, які можуть бути виконані згідно з k та m способами відповідно.

Тоді обидві вони можуть бути виконані k*m способами.

Задача про Вовочку великого

У Вовочки є 2 пари кросівок (Adidas, Reebok) та 3 пари джинс (Levi's, Wrangler, Diesel)

Скільки різних варіантів «прикіда» для дискотеки є у Вовочки?

ВідповідЬ 2 кросовок × 3 джинс = 6 «прикідів».

Задача про слова

Скільки «слів», що складаються з 4-х букв можна скласти з карток з літерами: ДЕМОГРАФІЯ

1-шу букву можна обрати – 10 способами

2-гу букву можна обрати – 9 способами

3-ю букву можна обрати – 8 способами

4-ту букву можна обрати – 7 способами

Відповідь: 10 × 9 × 8 × 7 = 5040 «слів»

Задача про числа

Скільки чотиризначних чисел існує, де є принаймні одна парна цифра у записі?

Всього чотиризначних чисел:

9 × 10 × 10 × 10 = 9000

Так як можна використовувати тільки цифри 1, 3, 5, 7, 9, чотиризначних чисел, в запису яких немає жодної парної цифри:

5 × 5 × 5 × 5 = 625

Тоді чотиризначних чисел, в запису яких є хоча б одна парна цифра:

9000 – 625 = 8375 чисел

Задача про Вовочку піжона

У Вовочки є дві краватки (синя і жовта) та три сорочки (біла, синя і зелена)

Скільки у Вовочки існує різних варіантів одягу («прикідід») для занять, при умові, що сорочка та краватка мають різний колір?

Рис. 6.1. Ілюстрація розв’язку задачі

Принцип Діріхле

Серед $n + 1$ об’єкта n типів є щонайменше 2 об’єкта однакового типу

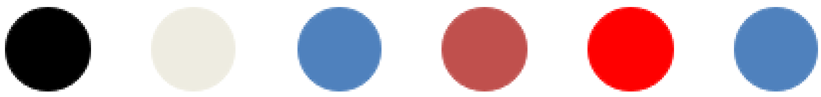


Рис. 6.2 Ілюстрація постановки задачи

Формулювання принципу Діріхле

Нехай *X*, *У* – кінцеві множини.

$| X | > | Y |$ (1)

Функція $f : X \text{->} Y$

Тоді знайдеться *y* є *Y*, яке функція *f* прийме не менше 2 раз.

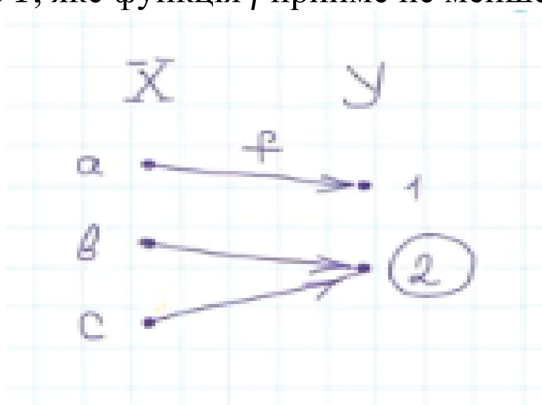


Рис. 6.4 Ілюстрація принципу Діріхле

Приклад:

В групі 20 студентів, довести, що знайдеться хоча б 1 місяць в році, такий що хоча б двоє студентів відсвяткують день народження в один місяць.

A – множина студентів

B – множина місяців в році

Функція *f* ставить у відповідність кожному студентку місяць, в якому він родився. Висновок: в множині *b* знайдеться хоча б один місяць, в якому функція *f* приймає значення більше 1 разу.

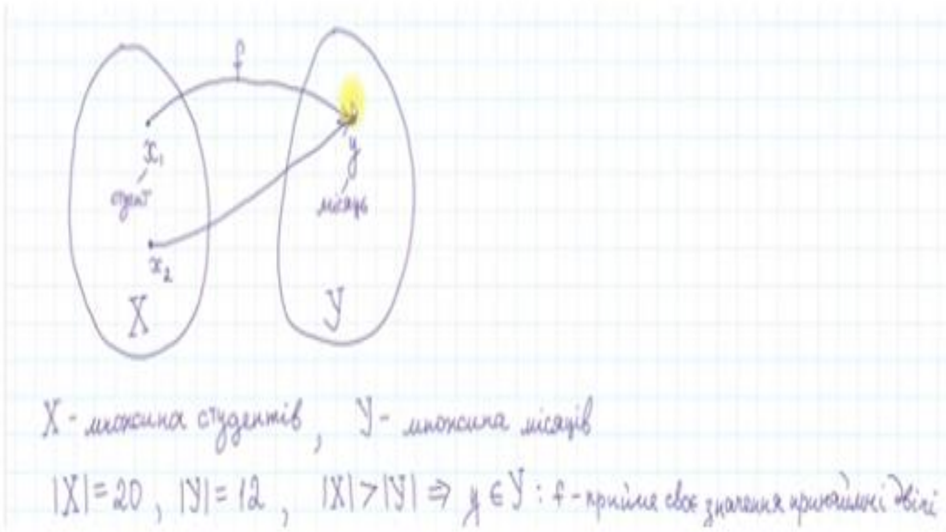


Рис. 6.4 Ілюстрація задачі

Приклад: 66 зайців розселити по 15 клітках. Довести, що знайдеться клітка, в якій буде проживати не менше 5 зайців

- X – множина зайців, |X| = 66
- У – множина кліток |Y| = 15

Функція *f* ставить у відповідність кожному зайцю клітку, в яку його заселять.

В нашому прикладі виконується умова, що потужність множини X > потужності множини У, помноженої на 4. Значить в множині У знайдеться такий елемент, який є значенням функції *f* і це значення функкія *f* прийме не менше 5 раз, а це значить, що знайдеться клітка, в якій буде не менше 5 зайців.

Узагальнення принципу Діріхле

Принцип Діріхле - це математичний принцип, який використовується для доведення існування об'єктів з певними властивостями. Він розширює базовий принцип Діріхле, який стверджує, що якщо розподілити скінченну кількість об'єктів в більшу кількість груп, то хоча б одна група буде містити не менше одного об'єкта. Узагальнення використовується для доведення аналогічних тверджень для невідомої або нескінченної кількості об'єктів.

6.4. Розміщення, перестановки та комбінації без повторень

Задача

В магазині продаються 5 найменувань цукерок. Дитині дозволили взяти 3 цукерки. Скількома способами він може вибрати 3 цукерки? Для узагальнення задачі введемо визначення: Нехай множина складається з n елементів (як 5 найменувань цукерок).

До речі, задача сформульована не повністю. По перше, в задачі не сказано, чи має значення порядок вибора цукерок, наприклад, якщо дитина візьме всі три цукерки собі, то не має значення в якому порядку вона буде їх вибирати. А якщо вона задумала першу цукерку віддати мамі, другу – татові і третю собі, то порядок вибора цукерок має значення. По друге в задачі не уточнюється можна вибирати цукерки різнах найменувань, чи це не обов’язково.

З цих n елементів вибирається k елементів. Ці k елементів називаються nk вибіркою. Буває 2 випадки:

1. k – різні

2. k – повторюються.

У випадку 1, ця вибірка називається вибіркою без повторень, у випадку 2 – це вибірка з повтореннями.

Якщо має значення в якому порядку ми вибирали ці елементи, то ця вибірка називається впорядкованою. Якщо порядок не має значення, то вибірка не впорядкована.

Якщо записали студентів у групу – невпорядкована вибірка;

Якщо записали студентів в журнал – впорядкована вибірка.

У комбінаториці виділяють три типи різних комбінацій елементів фіксованої множини.

- перестановки
- розміщення
- комбінації

Нижче будуть дані їх означення з позначеннями, які найбільшуживані.

Вибірки

Нехай дано n-елементну множину $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$

Невпорядкованою вибіркою з n елементів по k елементів (вибіркою з n по k) називається будь-яка k-елементна підмножина даної множини.

Нехай дано множину $\{1, 2, 3\}$

Вибірками з 3-х по 2 будуть множини:

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$.

Вибірка називається впорядкованою, якщо зафіксовано деякий порядок слідування її елементів.

Приклад:

Нехай дано множину $\{1, 2, 3, 4\}$

Впорядкованими вибірками з 4-х по 3 будуть: $\langle 1, 2, 3\rangle$, $\langle 4, 3, 2\rangle$, $\langle 2, 3, 4\rangle$.

Розміщення з без повторень

"Розміщення без повторень" - це комбінаторний термін, який використовується для опису способу розташування об'єктів без можливості повторення в певному порядку.

Наприклад, якщо у нас є множина об'єктів {A, B, C}, і ми хочемо розмістити їх у пару, не використовуючи один і той самий об'єкт більше одного разу, то можливі розміщення без повторень будуть:

AB, AC

BA, BC

CA, CB

У загальному випадку, якщо у нас є n об'єктів, а ми хочемо розмістити їх у k місцях, де $k \leq n$, і не дозволяється повторне використання одного і того ж об'єкта, кількість розміщень без повторень можна обчислити за допомогою формули для розміщення без повторень:

$A(n,k)=n!/(n-k)!$

Розміщенням з повтореннями із n елементів по k називається впорядкована nk вибірка з повтореннями.

Наприклад, якщо у нас є 5 об'єктів і ми хочемо розмістити їх у 3 місця без повторень, кількість можливих розміщень буде:

$P(5,3)= 5!/(5-3)! =5\times4\times3=60$

Приклад 1

Нехай у вазі 5 різних цукерок. Дитині дозволено вибрати 3 цукерки: 1 – мамі, 2 – татові, 3 – собі. Скількома способами можна вибрати цукерки.

Використовуємо принцип добутку: нехай одно за другим треба виконати k різних дій.

- 1 дію можна вибрати n1 способами (в нашому прикладі 5 способами)
- 2 дію можна вибрати n2 способами (4 способами)
- Останню дію можна виконати *nk* способами (3 способами)

Відповідь: 5*4*3 = 60

Загальний випадок:

Це кількість різних впорядкованих вибірок без повторень об’єму k з n елементної множини.

Обчислимо кількість розміщень з n елементів по k (тобто, скількома способами можна вибрати k елементів з елементної множини)

Пояснення: Перший елемент вибираємо n способами, другий елемент (n-1) способами ……

$$A_n^k = n * (n-1) * (n-2) * \ldots\ldots * (n-k+1)$$

Перетворимо формулу, помноживши чисельник і знаменник на одне й те ж число

$$A_n^k = \frac{n * (n-1) * (n-2) * \ldots\ldots * (n-k+1) * \boldsymbol{(n-k)} * \boldsymbol{(n-k-1)} * \ldots * \boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(n-k)} * \boldsymbol{(n-k-1)} * \ldots * \boldsymbol{1}}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ми можемо написати в Прикладі 1 ми знайшли число розміщень з 5 елементів по 3.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

Окремий випадок розміщень, коли $n = k$, називається перестановкою.

Задача про збори

В групі з N студентів. Для ведення зборів треба обрати голову та секретаря.

Скількома способами можна це зробити?

<голова, секретар> – впорядкована пара

$$A_{N\ студентів}^{2\ керівника} = N \cdot (N-1)$$

Задача про потяг

В купе вагону є два протилежних дивана по 5 місць у кожному

Всього 10 пасажирів, з них:

- 4 бажають сидіти обличчям до паровоза
- 3 – спиною до паровоза
- 3 – байдуже, як сидіти

Скількома способами можуть розмітитись пасажири?

Відповідь:

$$A_5^4 \cdot A_5^3 \cdot A_3^3$$

$$A_5^4 - \text{обличчям до паровоза}$$
$$A_5^3 - \text{спиною до паровоза}$$
$$A_3^3 - \text{байдуже, як сидіти}$$

Перестановки без повторень

Перестановки без повторень - це комбінаторний термін, який використовується для опису усіх можливих способів переставити об'єкти без повторення в певному порядку.

Визначення: Перестановка – це кількість різних впорядкованих вибірок об’єму n з n-елементної множини = Pn

Наприклад, якщо ми маємо набір об’єктів A, B, C можливі такі перестановки без повторень:

ABC *ACB*
BAC *BCA*
CAB *CBA*

У загальному випадку, якщо у нас є n об'єктів, кількість можливих перестановок без повторень можна обчислити за допомогою формули для факторіалу:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= \frac{n!}{0!} = n!$$

1	2	3	…	*n*
n	***n*-1**	***n*-2**	**…**	**1**

Приклад

5 студентів прийшли в бібліотеку. Скількома способами вони можуть стати в чергу?

Відповідь: 5-*4*3*2*1=5!

Пояснення:

Уявимо чергу

Перше місце може бути зайнято 5 способами

Друге – чотирма

……………………………………………

По принципу добутку нам треба числа перемножити

Задача про авто

Наталка везе з університету до метро Сашу, Миколу і Івана. Щоб вони не відволікали її від управління транспортним засобом, Наталка всіх їх садить на заднє сидіння. Скільки існує способів усістися хлопцям?

1	3	5
Сашко, Микола, Іван	Микола, Сашко, Іван	Іван, Сашко, Микола
2	**4**	**6**
Сашко, Іван, Микола	Микола, Іван, Сашко	Іван, Микола, Сашко

$$P_{3\ хлопців} = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Задача про числа

Скільки можна утворити різних чотиризначних чисел, де кожна цифра використовується лише один раз, з використанням цифр 0, 2, 4, 6?

P_4 - P_3: Всього з 0, 2, 4, 6 можна отримати P_4 перестановок

$P_4 = 24$ $P_3 = 6$; $24 - 6 = 18$

$$P_4 - P_3 = 18$$

Всього перестановок з {0, 2, 4, 6}

Перестановки, які починаються з 0 (натуральне число не може починатись з 0)

Комбінації без повторень

Комбінації без повторень – це унікальні комбінації об’єктів, які можна утворити з даної множини без повторення елементів.

Наприклад, якщо ми маємо множину $\{A, B, C\}$, можливі комбінації без повторень будуть:

AB

AC

BC

Це означає, що кожна комбінація містить лише унікальні елементи, і кожен елемент використовується тільки один раз.

Кількість різних невпорядкованих вибірок об’єму k з n елементної множини C_n^k

Зверніть увагу: в комбінаціях вибирається із n елементів по k і в розміщення вибирається із n елементів по k. Але в комбінаціях ці k елементів просто купа і порядок не має значення, а в розміщеннях порядок має значення. Виникає питання: чого більше розміщень чи комбінацій.

Число розміщень без повторень з n елементів по k **в k! разів більше**, ніж **число комбінацій без повторень** з n елементів по k

$$A_n^k = C_n^k \cdot k! \;\Rightarrow\; C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \;\Rightarrow\; C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

56

$$\{a, b, c, d, e\} \xrightarrow[\text{по 3 елементи}]{\text{10 комбінацій}} \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}$$

З кожної комбінації шляхом упорядкування елементів можна отримати 6 розміщень з 5 елементів по 3

$$\{a, b, c\} \xrightarrow{\text{розміщення}} \{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}$$

Число розміщень без повторень з 5 елементів по 3

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \equiv A_5^3$$

З кожної комбінації без повторень з n по k шляхом упорядкування виходить $k!$ різних розміщень без повторень з n елементів по k. Різні комбінації породжують різні розміщення

Приклад

Нехай у вазі 5 різних цукерок.

Дитині дозволили вибрати з цієї вази 3 цукерки (3 цукерки називаються комбінацією)

Порахуємо скільки буде різних комбінацій вибора цукерок.

В першій задачі про цукерки дитина також вибирала цукерки, але тоді мало значення в якому порядку вона їх вибирала і отримали 60 способів. Зараз порядок не має значення, тому отримане значення менше у 6 раз – це в 3! менше способів. Використовуємо формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

отримуємо

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

Задача про волейбол

5 дівчат і 3 хлопців грають у волейбол

Скількома способами вони можуть розбитися на 2 команди по 4 людини, якщо в кожній команді має бути хоча б по одному хлопцю?

1-ша команда (1 хлопець)

1-го хлопця можна вибрати C_3^1

3-х дівчат можна вибрати C_5^3

$\Downarrow$

$C_3^1 \cdot C_5^3 = 30$

2-га команда (2 хлопця)

2-х хлопців можна вибрати C_3^2

2-ч дівчат можна вибрати C_5^2

$\Downarrow$

$C_3^2 \cdot C_5^2 = 30$

$\Downarrow$

30 способів

6.5. Розміщення, перестановки та комбінації з повтореннями

Кількість різних впорядкованих вибірок з повтореннями об’єму k з n елементної множини $\overline{A_n^k}$

Розміщення з повтореннями - це комбінаторний термін, який описує процес розміщення об'єктів з можливістю повторення кожного об'єкта.

Наприклад, якщо у нас є множина об'єктів $\{A, B, C\}$, і ми хочемо розмістити їх у пару, дозволяючи повторення, то можливі розміщення з повтореннями будуть:

AA, AB, AC

BA, BB, BC

CA, CB, CC

У загальному випадку, якщо у нас є n об'єктів, а ми хочемо розмістити їх у k місцях з можливістю повторення кожного об'єкта, кількість розміщень з повтореннями можна обчислити за допомогою наступної формули:

$$\boldsymbol{n^r}, \text{де}$$

n - кількість різних об'єктів,

k - кількість місць для розміщення.

Наприклад, якщо ми маємо 3 різні об'єкти і хочемо розмістити їх у 2 місця з можливістю повторення, кількість можливих розміщень буде: 3^2=9.

Отже, існує 9 можливих розміщень з повтореннями для даної множини з 3 різних об'єктів у 2 місцях..

Розміщення з повтореннями - це спосіб вибору та розташування об'єктів у послідовності, де об'єкти можуть повторюватися. Іншими словами, вибираються елементи з деякого набору, і кожен елемент може використовуватися більше одного разу у послідовності.

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

1	2	3	…	*k*
n	***n***	***n***	…	***n***

Визначення: Розміщенням з n елементів по k елементів називається впорядкована множина, яка складається з k елементів, взятих з n елементів множини, серед яких можуть бути однакові елементи.

Приклад розміщення з повтореннями

Нехай задана множина: {1, 2, 3}
Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цих чисел?

$$\overline{A_n^k} = n^k = 3^2 = 9$$

(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,1), (3,1).

Задача про числа

Скільки чотиризначних номерів можна скласти з елементів множини A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}?

1	2	3	4
7	**7**	**7**	**7**

$$\overline{A_7^4} = 7^4 = 2401$$

Перестановки з повтореннями

Окремий випадок розміщення, коли n=k називається *перестановкою* (упорядкування якимось способом множини).

Нехай у нас є множина {A, B, C} і ми хочемо утворити перестановку довжиною 2 з повтореннями. Це означає, що ми можемо вибирати елементи з цієї множини замість кожного з двох місць у нашій перестановці.

Можливі перестановки з повтореннями будуть такі:

AA BA CA AB BB CB AC BC CC

Кожна з цих перестановок враховує можливість повторення елементів у послідовності.

У загальному випадку, якщо ми маємо n елементів, а розмір кожної перестановки дорівнює r, кількість можливих перестановок з повтореннями обчислюється за формулою: n^k, де n – кількість елементів у множині, k – довжина кожної перестановки.

Наприклад, якщо у нас є 3 елементи {A, B, C}, і ми хочемо утворити перестановку довжиною 2 з повтореннями, кількість можливих перестановок буде: $3^2 = 9$.

Послідовність довжини n, яка складається з k різних елементів, 1-й з яких повторюється n_1 раз, 2-й – n_2 раз, ... k-й – n_k раз $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$ називається перестановкою з повтореннями з n елементів.

Число перестановок з повтореннями довжини n з k різних елементів, взятих відповідно по n_1, n_2, ... n_k разів кожен позначається $P_n(n_1, n_2, ... n_k)$

$$P_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Задача про «математику»

Скільки різних «слів» можна скласти переставляючи літери у слові «математика»?

«математика» – кількість літер 10 ($n = 10$)

«а» – 3 рази ($n_1 = 3$)

«м» – 2 рази ($n_2 = 2$)

«т» – 2 рази ($n_3 = 2$)

«е», «к», «и» входять по разу ($n_4 = n_5 = n_6 = 1$)

$$P_{10}(3,2,2,1,1,1) = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200$$

Задача про скрині

Скількома способами можна розкласти 28 різних предметів по чотирьох різних скринях, так, щоб у кожній скрині, виявилося, по 7 предметів (порядок предметів в скрині не важливий)?

Всього предметів 28 ($n = 28$)

1-ша скриня – 7 предметів ($n_1 = 7$)

2-га скриня – 7 предметів ($n_2 = 7$)

3-тя скриня – 7 предметів ($n_3 = 7$)

4-та скриня – 7 предметів ($n_4 = 7$)

$$P_{28}(7,7,7,7) = \frac{28!}{7! \cdot 7! \cdot 7! \cdot 7!} = \frac{28!}{(7!)^4}$$

Комбінації з повтореннями

Комбінації з повтореннями - це спосіб вибору елементів з деякого набору, де елементи можуть повторюватися у вибірці. Це означає, що при формуванні комбінацій допускається повторення елементів.

Наприклад, якщо маємо набір з трьох символів $\{A, B, C\}$ і формуємо комбінації довжиною 2 з повтореннями, то можливі комбінації будуть:

AA, AB, AC

BA, BB, BC

CA, CB, CC.

У цьому випадку один і той самий символ може зустрічатися більше одного разу у комбінації.

Комбінаціями з повтореннями називається невпорядкована *nk* вибірка з повтореннями.

Приклад

Є 3 типи монет: 2 грн., 5 грн., 10 грн. Кількість самих монет не враховуємо. Беремо будь-які 5 монет і кладемо їх в карман. Скількома способами ми можемо зробити такий вибір?

Отже,

- порядок вибора монет не важливий, оскільки вони всі опиняться в кармані, і немає різниці в якій послідовності ми їх будемо вибирати
- повторення дозволяються, вони обов'язково будуть, тому що типів монет мало – 3 типи, а вибрати треба 5 монет.

Впорядкуємо монети за зростанням

2 2 5 10 10

Розв'язувати задачу будемо за допомогою метода шарів і перегородок, метода елементів і розділових знаків

Розділимо сусідні групи монет нулями

2 2 0 5 0 10 10

За об'єкт будемо вважати і монету і розділовий знак, отже, маємо 7 об'єктів.

Варіанти вибору монет

1. Монету 5 не вибрали

   2 2 2 0 0 10 10 - 7 об'єктів

2. Монету 10 не вибрали

   2 2 2 0 5 5 0 - 7 об'єктів

3. Монету 2 не вибрали

   0 5 5 5 0 10 10 - 7 об'єктів

Розташування розділових знаків однозначно вказує на зроблений нами вибір, наприклад, є тільки розділові знаки і ми можемо сказати, який ми вибір зробили, бо ми самі побудували таке правило

2 0 0 10 10 10 10 – немає монети 5.

Задача в загальному вигляді:

Нехай множина складається з n елементів. З нього вибираємо k елементів. Порядок вибора елементів значення не має. Елементи можуть повторюватись.

- Множину з n елементів впорядковуємо
- Візьмемо якусь комбінаціїю з *k* елементів і впорядкуємо елементи цієї комбінації так, як ми впорядкувати множину *A*. Отримали констукцію з *k* елементів і *n-1* мітки

$$k + n - 1$$

Перехід до загального випадку

2	2	0	3	0	10	10

3 типи монет | n типів монет

5 вибрати | k вибрати

3 групи | n груп

2 розділові знаки | (n-1) розділовий знак

7 об'єктів | (n + k -1) об'єкт

Оскільки

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21 \quad | \quad \overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$$

Зауваження: Спрощення формули: Як в останній формулі отримали індекс k? Це різниця нижнього і верхнього індексу в попередній формулі:

$(n+k-1)-(n-1) = k$, а нижній індекс обох формул зберігається.

Зауваження: Чи дорівнює: $C(n, k)=C(n, n-k)$ в комбінаціях без повторень

Так, в комбінаціях без повторень рівність $C(n,k)=C(n,n-k)$ справедлива.

Щоб це продемонструвати, розглянемо, як вираховуються комбінації без повторень $C(n,k)$.

Комбінація $C(n,k)$ визначає кількість способів вибрати k елементів з множини з n елементів.

Комбінація $C(n,n-k)$, з іншого боку, вибирає $n-k$ елементів з тієї ж множини з n елементів.

Оскільки вибір k елементів і вибір $n-k$ елементів означає вибір решти елементів, вони є *взаємозамінними*. Тобто, якщо ми обрали k елементів, то залишилось $n-k$ елементів для вибору. І навпаки, якщо ми обрали $n-k$ елементів, то залишилось k елементів для вибору.

Отже, $C(n,k)=C(n,n-k)$ відображає той самий процес вибору, просто інакше сформульований.

Приклад: Нехай в магазині продаються 3 види цукерок. Дитині дозволили взяти 5 цукерок. Скількома способами він це може зробити?

Вибрані 5 цукерок називаються комбінацією. В якому порядку вибираються цукерки значення не має. Тобто комбінація з 5 цукерок. Впорядкуємо цукерки за видами: цукерки 1 виду, потім 2 виду, потім 3.

Нехай дитина взяла 1 цукерку 1 виду, 2 цукерки 2 виду, 2 цукерки 3 виду.

Впорядкуємо 5 цукерок за видами: спочатку розкладемо цукерки 1 виду, потім 2 виду, потім 3.

1 вид   2 вид   3 вид

1 0 1 1 0 1 1

Таких міток в прикладі 2. Ми отримали конструкцію з 7 позицій – 5 цукерок і 2 мітки.

Відмітимо, що кожній комбінації відповідає визначене розміщення міток на цих позиціях і навпаки кожному положенню 2 міток на цих 7 позиціях відповідає визначена комбінація.

Значить кількість таких комбінацій з повтореннями такі, скількома способами можна вибрати 2 мітки на 7 позиціях.

Отже 2 мітки на 7 позиціях можна розставити такою кількістю способів: це кількість комбінацій

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

Приклад: Є 10 цукерок. Кількома способами їх можна роздати 4 дітям

n = 10, k = 4.

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!} = \frac{(10+4-1)!}{(10-1)!*4!} = \frac{13!}{9!*4!} = 715$$

10 0 0 0

0 10 0 0

1 9 0 0 …………………..

Різним комбінаціям будуть відповідати різні перестановки з повтореннями з k одиниць і n-1 нулів, а кожній перестановці з повтореннями – своя комбінація

$$\overline{C}_n^k = P_{n+k-1}(n-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!} = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$$

Приклад: 2-га задача про Вовочку ласуна

У кондитерській продається 4 сорти тістечок: бісквітні, заварні, пісочні та горіхові

Скількома способами Вовочка може купити 7 тістечок?

Кожну покупку тістечок можна задати наборами довжини 4, які складаються з додатних цілих чисел, сума яких дорівнює 7

2 бісквітні, 1 заварне, 3 пісочних, 1 горіхове $\xrightarrow{\text{набір}}$ (2, 1, 3, 1) $\xrightarrow{\text{кодування}}$ (1101011101)

4 бісквітні, 0 заварних, 3 пісочних, 0 горіхових $\xrightarrow{\text{набір}}$ (4, 0, 3, 0) $\xrightarrow{\text{кодування}}$ (1111001110)

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$$

Алгоритм вибору формули для обчислення

<table>
<tr><th colspan="6">Визначити n і k</th></tr>
<tr><td colspan="6">Чи важливий порядок? (Чи впорядкована вибірка?)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ні</td><td colspan="4">Так</td></tr>
<tr><td colspan="2">Чи є повторення?</td><td colspan="4">Вибираємо всі n елементів</td></tr>
<tr><td>Ні</td><td>Так</td><td colspan="2">Ні</td><td colspan="2">Так</td></tr>
<tr><td>Комбінації</td><td>Комбінації з повтореннями</td><td colspan="2">Чи є повторення?</td><td colspan="2">Чи є повторення?</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$</td><td rowspan="3">$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1}$</td><td>Ні</td><td>Так</td><td>Ні</td><td>Так</td></tr>
<tr><td>Розміщення без повторень</td><td>Розміщення з повтореннями</td><td>Перестановки без повторень</td><td>Перестановки з повтореннями</td></tr>
<tr><td>$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$</td><td>$\overline{A}_n^k = n^k$</td><td>$P_n = n!$</td><td>$P_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$</td></tr>
</table>

Задача про профком

В профком обрано 9 осіб. З них треба вибрати голову, його заступника та касира. Скількома способами це можна зробити?

- Упорядкуємо посади: голова, заступник, касир
- Вибираємо з 9 осіб трьох, значить $n = 9$, $k = 3$
- Порядок важливий?

Так, вибираємо праву частину таблиці

- Наступне питання: вибираємо всі n? Ні
- Повторення є? Ні
- Отже, наша вибірка – розміщення без повторень:

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Задача про автобуси

Скількома способами можна розсадити 40 осіб у 3 автобуси, якщо способи розрізняються лише кількістю осіб у кожному автобусі?

Поставимо 40 осіб в чергу і роздамо кожному квиток з номером автобуса

Отримаємо вибірку, наприклад, таку: 1,1,2,2,3,1, ..., 2,1

У цій вибірці 40 елементів (k = 40), а значень – номерів автобусів 3 (n = 3)

Порядок важливий? Ні, тому що якщо поміняти місцями пасажирів кількість осіб в кожному автобусі залишиться незмінним

Чи є повторення? Так, так як номер автобуса може зустрітися кілька разів. Отже, вибираючи ліву частину, зупиняємося на комбінаціях з повтореннями з n = 3 по k = 40 елементів.

$$\overline{C_3^{40}} = C_{3+40-1}^{40} = C_{42}^{40} = \frac{42!}{40!(42-40)!} = \frac{42!}{40! \cdot 2!} = 41 \cdot 21 = 861$$

Потрібно пам’ятати

Під час розв’язання комбінаторних задач слід пам'ятати, що:

- успіх у розв’язання залежить від того, чи (наскільки правильно) зрозуміла умова
- майже не існує «чистих прикладів», тобто таких в яких спрацьовує «готова» формул.

6.6. Формула включень-виключень (ФВВ)

Формула включення-виключення - це основна комбінаторна формула, яка визначає кількість об'єднання та перетину двох множин. Ця формула стверджує, що кількість елементів у об'єднанні двох множин можна обчислити як суму кількості елементів кожної множини, мінус кількість елементів, які належать обом множинам одночасно.

Це комбінаторна формула, яка дозволяє визначити кількість елементів об'єднання скінченного числа скінченних множин, які в загальному випадку можуть перетинатися.

ФВВ в термінах множин

$N(X)$ – кількість елементів множини X

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

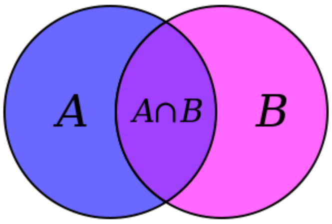


Рис. 6.1. Перетин двох множин

У $N(A) + N(B)$ елементи перетину $A \cap B$ враховані двічі
ФВВ в термінах множин
$N(X)$ – кількість елементів множини X
$N(A \cup B \cup C) =$
$= N(A) + N(B) + N(C) -$
$- N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$

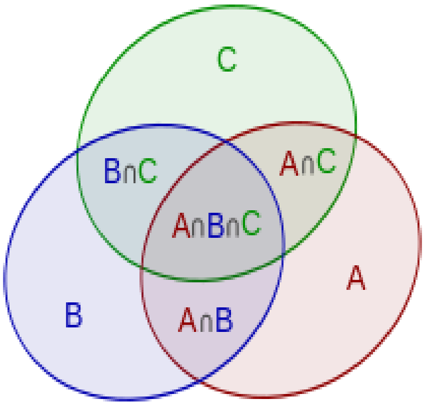


Рис. 6.2. Перетин двох множин

Приклад на формулу включень-виключень

100-хлопців
30-самбо; 50-карате; 40-кунгфу
15-самбо+карате; 10-самбо+кунгфу
20-карате+кунгфу
7-самбо+карате+кунгфу
Скільки слабаків?
Відповідь: слабаки = 100 - 30 - 50 - 40 + 15 + 10 + 20 - 7 = 18

6.7. Рекурентні співвідношення

Метод зведення до аналогічної задачі для меншого числа предметів називається методом рекурентних співвідношень.

Задачу про n предметів, можна звести до задачі про $n - 1$ предмет, потім до задачі про $n - 2$ предмета. . .

Послідовно зменшуючи число предметів, доходимо до задачі, яку вже легко вирішити.

Задача про кроликів

У задачі, запропонованій у книзі Фібоначчі «Liber Abaci» (1202 р.), розглядається ситуація, де пара кроликів щомісяця народжує пару кроленят (самця і самку), а знову народжені кроленята також починають приносити потомство через два місяці.Скільки кроликів з'явиться через рік, якщо на початку року була одна пара кроликів?

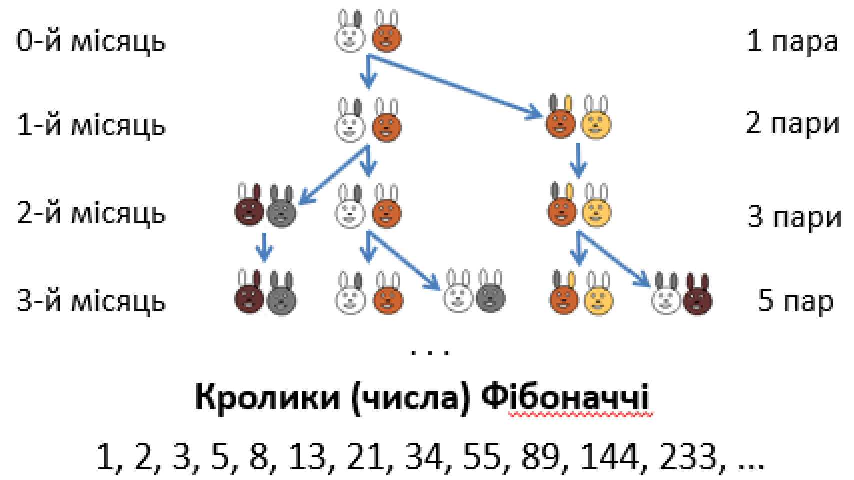


Рис.6.3. Ілюстрація задачі про кроликів

$F(n)$ – кількість пар кроликів після закінчення n-го місяця

$F(0) = 1, \quad F(1) = 2$

$F(n-1)$ – кількість статево зрілих пар на n-му місяці

$F(n+1) = F(n) + F(n-1)$

Рекурентним співвідношенням k-го порядку називається формула, що дозволяє виражати значення члена послідовності з номером n ($n > k$) через члени цієї послідовності з номерами $n-1, n-2, \ldots, n-k$.

Розв'язком рекурентного співвідношення називається числова послідовність, яка перетворює його в правильну рівність при підстановці в нього формули загального члена послідовності.

Початкові умови РС

Початкові умови рекурентного співвідношення визначаються значеннями перших деяких членів послідовності. Ці початкові умови необхідні для того, щоб однозначно визначити розв'язок рекурентного співвідношення.

Зазвичай, якщо ми маємо лінійне однорідне рекурентне співвідношення k-го порядку, то для його розв'язку потрібно знати значення перших k членів послідовності $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Ці значення називаються початковими умовами.

Отже, початковими умовами рекурентного співвідношення k-го порядка називаються перші k членів послідовності, що є розв’язками даного рекурентного співвідношення.

Наприклад, якщо ми маємо рекурентне співвідношення другого порядку:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

Для того, щоб однозначно визначити послідовність a_n, нам потрібні початкові умови a_0 і a_1.

Знання початкових умов дозволяє знайти значення констант A_1 і A_2 у загальному розв’язку рекурентного співвідношення.

Отже, початкові умови важливі для того, щоб мати точний розв'язок рекурентного співвідношення та відображати початкову точку послідовності.

Лінійне однорідне РС

Лінійне однорідне рекурентне співвідношення - це рекурентне співвідношення, в якому кожен член послідовності є лінійною комбінацією попередніх членів цієї ж послідовності, без будь-яких додаткових нелінійних членів чи констант. Такі співвідношення часто зустрічаються в математиці, теорії чисел, теорії графів, комбінаториці та інших областях.

Загальна форма лінійного однорідного рекурентного співвідношення k-го порядку має вигляд:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

де c_1, c_2, …., c_k це константи, які можуть бути довільними числами, і

a_0, a_1, …. – члени послідовності.

Для вирішення таких рекурентних співвідношень часто використовуються методи, пов'язані зі знаходженням характеристичного рівняння. Характеристичне рівняння отримується шляхом прирівнювання коефіцієнтів рекурентного співвідношення до нуля і знаходження його коренів. Ці корені визначають загальний вигляд розв'язку рекурентного співвідношення.

Наприклад, для простого випадку лінійного однорідного рекурентного співвідношення другого порядку:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

Метод характеристичного рівняння зводиться до розв'язання квадратного рівняння виду:

$$x^2 = c_1 x + c_2 ,$$

де x - невідома. Розв'язання цього рівняння дає два корені, які потім використовуються для побудови загального вигляду розв'язку рекурентного співвідношення.

Загальний розв’язок

Загальний розв'язок лінійного однорідного рекурентного співвідношення визначається за допомогою його характеристичного рівняння. Давайте розглянемо загальний випадок лінійного однорідного рекурентного співвідношення k-го порядку:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

де c_1, c_2, …., c_k - константи, a_0, a_1, …. – члени послідовності.

Характеристичне рівняння цього рекурентного співвідношення має вигляд:

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_{k-1} x + c_k$$

Загальний розв'язок рекурентного співвідношення має вигляд:

$$a_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \ldots + A_k x_k^n$$

де A_1, A_2, ..., A_k - це константи, які визначаються початковими умовами задачі.

Щоб знайти значення цих констант, необхідно використовувати початкові умови, які задають перші k членів послідовності a_0, a_1, …a_{k-1}. Це дозволяє визначити значення констант A_1, A_2, ..., A_k..

Отже, загальний розв'язок рекурентного співвідношення включає в себе загальний вигляд залежності послідовності a_n від n, виражений через константи та характеристичні корені..

Характеристичне рівняння

Характеристичне рівняння - це рівняння, яке зв'язує коефіцієнти рекурентного співвідношення з його властивостями. Для лінійних рекурентних послідовностей характеристичне рівняння є характеристичним поліномом, що характеризує рішення рекурентного співвідношення.

Характеристичним рівнянням співвідношення називається рівняння:

$\lambda^k = a_1 \cdot \lambda^{k-1} + a_2 \cdot \lambda^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot \lambda + a_k$, де λ - невідома змінна.

Розв'язання цього рівняння дає характеристичні корені, які потім використовуються для знаходження загального вигляду членів рекурентної послідовності.

Аудиторне завдання

1. Скількома способами можна обрати сувенір з наявних 10 магнітів, 5 репродукцій картин і 6 альбомів?
2. Скільки існує двозначних парних чисел в десятирічній системі числення?
3. Скількома способами можна вибрати з натуральних чисел від 1 до 20 два числа так, щоб їх сума була непарним числом?
4. З міста А в місто В веде чотири дороги, а з міста В в місто С – 3 дороги, також є шість доріг з А в С, які не проходять через В. Скількома способами можна дістатися з А в С, використовуючи зазначені дороги?
5. Кодовий замок має 10 кнопок з цифрами від 1 до 0. Він відкривається одночасним натисканням трьох кнопок. Скільки існує різних кодових комбінацій.
6. Скількома способами можна вибудувати чергу в касу, якщо квитки хочуть купити 7 людей?

7. Скількома способами можна розставити десять різних книг на полиці, щоб певні чотири книги стояли поруч?
8. Скількома способами можна скласти команду з чотирьох осіб для змагань з бігу, якщо є сім бігунів? Якщо команда вибиралася для естафетного бігу на 100+200+400+800 м?
9. Пароль, який відкриває доступ до комп'ютера, складається з шести символів – малі літери латинського алфавіту (всього 26 літер). Скільки можна придумати різних паролів?
10. Номерний знак автомобіля складається з восьми символів розміщених послідовно: двох літер (латинський алфавіт), чотирьох цифр і двох літер. Скільки всього може існувати номерних знаків?
11. Скільки різних «слів» можна скласти переставляючи літери у слові «паралелепіпед»?
12. Скількома способами можна переставити літери у прізвищі «Богомолов» так, щоб чотири літери «о» не йшли підряд?
13. Скільки існує різних випадінь двох однакових гральних кубиків?
14. Скількома способами 12 однакових п'ятаків можна розкласти по п'яти різних гаманцях так, щоб жоден гаманець не опинився порожнім?

Домашнє завдання

1. У місті працюють 10 музеїв, 5 театрів і 8 кінотеатрів. Скільки існує варіантів для організації культурного відпочинку в неділю?
2. На фермі живуть 15 корів і 10 кіз. Скількома способами можна вибрати одну корову і одну козу?
3. У мікроавтобусі 10 місць, одне з яких – місце водія. Скількома способами можна розсадити 10 осіб, якщо місце водія можуть зайняти тільки троє з них?
4. На 5 полицях шафи стоять 160 книг. На одній з них – 3 книги. Доведіть, що обов’язково знайдеться така полиця, на якій міститься не менше 40 книг.
5. Скільки існує можливостей для присудження першого, другого і третього місць сімнадцяти учасницям конкурсу краси?
6. Скільки шестизначних чисел, кратних 5, можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 за умови, що цифри в записі числа не повторюються?
7. Скількома способами на шаховій дошці можна розставити 8 тур таким чином, що б вони не били одна одну?
8. У кабіну ліфта 9-поверхового будинку увійшло 3 пасажири, кожен з яких може вийти на будь-якому з 8-ми поверхів. Скількома способами вони можуть це зробити?
9. Скільки різних «слів» можна скласти переставляючи літери у прізвищі «Голобородько»?
10. Скількома способами можна розставити 20 книг в книжковій шафі з 5 полицями, якщо кожна полиця може вмістити всі 20 книг?

11. На пошті продаються 10 видів листівок. Скількома способами можна купити: 5 листівок? , 5 різних листівок? , 15 листівок з повтореннями?
12. Скількома способами три людини можуть розподілити між собою 6 однакових яблук, 4 однакових апельсина, 3 однакових сливи, 1 лимон, 1 грушу, 1 айву і 1 фінік?

Завдання для самостійної роботи

1. Опрацювання матеріалів лекції.
2. Виконання домашнього завдання.
3. Опрацювання запропонованих додаткових джерел.

Контрольні запитання до теми 6

1. Вибірки впорядковані та невпорядковані
2. Правила суми та добутку
3. Принцип Діріхле
4. Комбінації, розміщення та перестановки без повторень
5. Комбінації, розміщення та перестановки з повтореннями, означення та формули обчислення.

Посилання на відео лекції за темою № 6

Тема_6. Ч.1 - https://drive.google.com/file/d/1X_rxfFYeMuR2X8ywcsurf6PKetKoR4b7/view?usp=sharing

Тема_6. Ч.2 - https://drive.google.com/file/d/1Xb61WYVEAYNvDVprqplDSpgqXjiT2hFQ/view?usp=sharing

Рекомендована література

1. Бойко І.В., Петрик М.Р., Цуприк Г.Б. Дискретні структури (алгебраїчні та числові системи, комбінаторний аналіз). – Тернопіль - Видавництво ТНТУ. – 2017– 275 с.
2. Балога С.І. Дискретна математика. Навчальний посібник. – Ужгород: ПП «АУТДОР-ШАРК», 2021. – 124 с
3. C.Sastry, R.Nayak. A Textbook on Discrete Mathematics. - I K International Publishing House, 2020. - P.436
4. Матвієнко М.П. Дискретна математика: - Навчальний посібник. – К: "Видавництво Ліра К", 2013 – 324 с.
5. Кондратюк С.В., Рибак О.І. "Дискретна математика: підручник для вищих навчальних закладів". Видавництво "Лібра Комфорт", 2018 рік. – 496 с.
6. Харченко О.О., Харченко М.М. "Дискретна математика. Курс лекцій", Видавництво "Кондор", 2014 рік. – 192 С.
7. Булик В.І., Гаврилюк О.М. "Дискретна математика: Видавництво "Видавничий дім "Просвіта"", 2014 рік. – 128 С.
8. Новицький І.С. [та ін.], Дискретна математика в прикладах і задачах [Електроний ресурс]/ Навчальний посібник. 2013 р. Режим доступу: http://ir.nmu.org.ua/bitstream/handle/123456789/3489/CD265.pdf?sequence=1&isAllowed=y