Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки
2022, 3
Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/3.2

Ю.С. Мішура[1], *д.ф.-м.н., проф.*
С.В. Кушніренко[2], *к.ф.-м.н., доцент*
Л.В. Волох[3], *к.ф.-м.н., доцент*

Інваріантні поверхні для певних класів систем другого порядку стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13,
e-mail: yuliyamishura@knu.ua
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13,
e-mail: bksv@univ.kiev.ua
[3]Київський національний університет технологій та дизайну, 01011, Київ, вул. Немировича-Данченка, 2,
e-mail: voloh.lv@knutd.edu.ua

Yu.S. Mishura[1], *Dr of Sci., Prof.*
S.V. Kushnirenko[2], *Ph.D., Associate Prof.*
L.V. Voloh[3], *Ph.D., Associate Prof.*

Invariant surfaces for certain classes of systems of the second-order to stochastic differential equations with jumps

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13, Volodymyrska st.,
e-mail: yuliyamishura@knu.ua
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13, Volodymyrska st.,
e-mail: bksv@univ.kiev.ua
[3]Kyiv National University of Technologies and Design, 01011, Kyiv, 2, Nemyrovycha-Danchenka st.,
e-mail: voloh.lv@knutd.edu.ua

У статті розглядається поняття інваріантних множин неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками. Для певних класів систем другого порядку неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками знайдено необхідні і достатні умови інваріантності відповідних поверхонь. Отримані результати дозволяють знаходити інваріантні поверхні та умови їх інваріантності для вказаних класів стохастичних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння зі стрибками, інваріантні поверхні.

In this paper, we consider the concept of invariant sets of inhomogeneous stochastic differential equations with jumps. For certain classes of systems of the second order of inhomogeneous stochastic differential equations with jumps the necessary and sufficient conditions for the invariance of the corresponding surfaces are established. The obtained results provide opportunities to find the invariant surfaces and conditions of their invariance for the specified classes of stochastic differential equations.

Key Words: stochastic differential equations with jumps, invariant surfaces.

Присвячуємо цю роботу світлій пам'яті професора кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Г.Л. Кулініча (09.12.1938 – 10.02.2022)

1 Вступ

Ця стаття продовжує дослідженння з теорії інваріантних множин стохастичних диференціальних рівнянь (СДР), яку започаткував у семидесятих роках минулого століття Григорій Логвинович Кулініч [1] та розвивав разом зі своїми учнями. Він вперше встановив, що розв'язок СДР Іто може з ймовірністю 1 «дифундувати» вздовж гладкої кривої фазового простору. Для СДР ним було введено поняття локальної інваріантності множин вигляду $G(x) = C$, де $G(x)$ — двічі неперервно диференційовна функція в області D, C – певна стала. Г.Л. Кулініч знайшов необхідні і достатні умови локальної інваріантності таких множин, а також явний вигляд усіх можливих локально інваріантних кривих для лінійних СДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, описав класи нелінійних СДР, для яких ці криві будуть локально інваріантними. Також ним було розроблено методи дослідження поведінки розв'язків на інваріантних множинах. Г.Л. Кулініч започаткував аналогічну теорію і для СДР зі стрибками.

У цій статті загальні результати про інваріантність множин для систем неоднорідних СДР зі стрибками адаптовані для певних класів систем другого порядку таких рівнянь. Локально інваріантні множини для розглядуваних класів СДР пов'язані з фазовими траєкторіями систем звичайних диференціальних рівнянь. З необхідних умов локальної інваріантності випливає, що локально інваріантні множини систем СДР містяться серед локально фазових траєкторій відповідних детермінованих систем. Знайдені необхідні і достатні умови локальної інваріантності дозволяють знаходити інваріантні поверхні та умови їх інваріантності для вказаних класів СДР.

Особливістю нашої роботи є те, що необхідні і достатні умови локальної інваріантності поверхонь для певних класів систем СДР другого порядку знайдено у випадку, коли міра стрибків центрованої пуассонівської міри є нескінченною. Аналогічні результати для систем СДР без післядії, тобто у випадку скінченної міри, представлені у роботі [2].

2 Необхідні відомості

У цьому розділі наведено необхідні означення та загальні результати про інваріантні множини, отримані для систем неоднорідних СДР зі стрибками в [4].

Розглянемо систему неоднорідних СДР вигляду

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))\,dt + \sum_{k=1}^{n} b_k(t,\xi(t))\,dw_k(t) + \int_{\Theta_1} c(t,\xi(t-),\theta)\,\tilde{\nu}(dt,d\theta) + \int_{\Theta_2} c(t,\xi(t-),\theta)\,\nu(dt,d\theta), \tag{2.1}$$

$\xi(t_0) = x_0$ ($t_0 \geq 0$, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$), де
$a(t,x) = \big(a_i(t,x),\ i = \overline{1,n}\big)$,
$b_k(t,x) = \big(b_{ik}(t,x),\ i = \overline{1,n}\big)$,
$c(t,x,\theta) = \big(c_i(t,x,\theta),\ i = \overline{1,n}\big)$ – дійсні вимірні невипадкові векторні функції, що визначені при $t \geq t_0$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\theta \in \Theta$, $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$, $\Theta_1 \cap \Theta_2 = \emptyset$; $(\Theta,\ \mathcal{B}_\Theta)$ – вимірний простір; $w_k(t)$ – незалежні в сукупності одновимірні вінерівські процеси; $\nu([0,t]), A)$ – пуассонівська міра, для якої $E\nu([0,t],A) = t\,\Pi(A)$, $A \in \mathcal{B}_\Theta$, $\tilde{\nu}(dt,d\theta) = \nu(dt,d\theta) - \Pi(d\theta)\,dt$, $\Pi(\Theta_1) = \infty$, $\int_{\Theta_1} |\theta|^2 \Pi(d\theta) < \infty$, $\Pi(\Theta_2) < \infty$; процеси $w_k(t)$ і міра $\nu([0,t],A)$ задані на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$, $\Im_t$ - вимірні при будь-якому $t \geq t_0$ і A, а також незалежні між собою, $\Im_t \subset \Im$ – неспадний потік σ - алгебр.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (2.1) виконуються умови (див. [3], стор. 518) існування єдиного неперервного справа сильного розв'язку $\xi(t) = \big(\xi_i(t),\ i = \overline{1,n}\big)$ цього рівняння.

Будемо притримуватися таких позначень:
$\nabla_x \cdot = \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x_1}, \frac{\partial\cdot}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial\cdot}{\partial x_n}\right)$;

$\big(\nabla\cdot, b_k(x)\big)^2 G(x) = \sum_{i=1}^{n} G''_{x_i^2}(x)\, b_{ki}^2(x) + \sum_{i,j=1,\ i\neq j}^{n} G''_{x_i x_j}(x)\, b_{ki}(x)\, b_{kj}(x)$;

$LG(t,x) = G'_t(t,x) + \left(\nabla_x G(t,x),\ a(t,x) - \int_{\Theta_1} c(t,x,\theta)\,\Pi(d\theta)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \big(\nabla_x\cdot, b_k(t,x)\big)^2 G(t,x)$;

$\triangle_G(t,x,\theta) = G(t, x + c(t,x,\theta)) - G(t,x)$.

Розглянемо множину $Q = [0,\infty) \times D$, D – певна відкрита область із $\mathbb{R}^n$ така, що

$$\Pi\{\theta \in \Theta :\ (t, x + c(t,x,\theta)) \notin Q\} = 0 \tag{2.2}$$

для всіх $(t,x) \in Q$.

Нехай $(t_0, x_0) \in Q$ і позначимо через $\tau_Q(t_0,x_0)$ – момент першого виходу траєкторії розв'язку $\xi(t)$ із області Q, тобто

$$\tau_Q(t_0,x_0) = \inf\{t \geq t_0 :\ (t,\xi(t)) \notin Q\},$$

якщо множина тих $t \geq t_0$, для яких $(t,\xi(t)) \notin Q$, не порожня і нехай $\tau_Q(t_0,x_0) = \infty$ в іншому випадку.

Позначимо через $\Gamma_Q(G)$ множину

$$\Gamma = \{(t,x) :\ G(t,x) = C\} \subset Q,$$

де C – певна стала, функція $G(t,x)$ визначена в області Q, має неперервні в області Q похідні G'_t, G'_{x_i}, $G''_{x_i x_j}$, $i,j = \overline{1,n}$, поверхня $G(t,x) = C$ є простою у розумінні Жордана і інтеграли

$$\int_{\Theta} [\triangle_G(t,x,\theta)]^{\,k}\, \Pi(d\theta),\ k = 1,2 \tag{2.3}$$

неперервні за змінними (t,x).

Означення 2.1. Множину $\Gamma_Q(G)$ будемо називати інваріантною в області Q множиною рівняння (2.1), якщо для всіх $(t_0, x_0) \in \Gamma_Q(G)$ і всіх $t \geq t_0$:

$$[G(t, \xi(t)) - C]\phi(t) = 0 \quad \text{з ймовірністю 1},$$

де $C = G(t_0, x_0)$, $\phi(t) = 1$ при $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$ і $\phi(t) = 0$ при $t \geq \tau_Q(t_0, x_0)$.

Теорема 2.1. *Для локальної інваріантності множини $\Gamma_Q(G)$ рівняння (2.1) необхідно, щоб для всіх $(t, x) \in \Gamma_Q(G)$ мали місце рівності:*

$$(\nabla_x G(t, x), b_k(t, x)) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \tag{2.4}$$

$$LG(t, x) = 0; \tag{2.5}$$

$$\Pi\{\theta \in \Theta : \triangle_G(t, x, \theta) \neq 0\} = 0. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2. *(Необхідні і достатні умови локальної інваріантності множини $\Gamma_D(G)$). Для того, щоб множина $\Gamma_Q(G)$ була інваріантною в області Q множиною рівняння (2.1) при $C = G(t_0, x_0)$ для $(t_0, x_0) \in Q$ необхідно і достатньо, щоб рівності (2.4), (2.5) мали місце при всіх $(t, x) \in Q$,*

$$\Pi\{\theta \in \Theta_1 : \triangle_G(t, x, \theta) \neq 0\} = 0$$

для всіх $(t, x) \in Q$,

$$\Pi\{\theta \in \Theta_2 : \triangle_G(t, x, \theta) \neq 0\} = 0$$

для всіх $(t, x) \in \Gamma_Q(G)$.

Зауваження 2.1. Оскільки похідні G'_t, G'_{x_i}, $G''_{x_i x_j}$ неперервні в області Q і в області Q виконується умова (2.3), то при $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$ має місце узагальнена формула Іто

$$\begin{aligned} dG(t, \xi(t)) &= \\ = \left\{ LG(t, \xi(t)) + \int_{\Theta_1} \triangle_G(t, \xi(t), \theta)\, \Pi(d\theta) \right\} dt &+ \\ + \sum_{k=1}^{n} (\nabla_x G(t, \xi(t)), b_k(t, \xi(t)))\, dw_k(t) &+ \\ + \int_{\Theta_1} \triangle_G(t, \xi(t-), \theta)\, \tilde{\nu}(dt, d\theta) &+ \\ + \int_{\Theta_2} \triangle_G(t, \xi(t-), \theta)\, \nu(dt, d\theta). \end{aligned} \tag{2.7}$$

3 Основні результати

Для системи (2.1) другого порядку з одним вінерівським процесом, тобто $n = 2$, $b_2(t, x) \equiv 0$, $b_1(t, x) = b(t, x)$,

$$\begin{aligned} d\xi(t) = a(t, \xi(t))\, dt + b(t, \xi(t))\, dw(t) &+ \\ + \int_{\Theta_1} c(t, \xi(t-), \theta)\, \tilde{\nu}(dt, d\theta) &+ \\ + \int_{\Theta_2} c(t, \xi(t-), \theta)\, \nu(dt, d\theta)&, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$\xi(t_0) = x_0$ $(t_0 \geq 0,\ x_0 = (x_{10},\ x_{20}))$, розглянемо такі класи рівнянь:

$$\begin{aligned} K_1 :\ \ b(t, x) &= (g_1 x_1 + g_2 x_2,\ -g_2 x_1 + g_1 x_2), \\ c(t, x, \theta) &= (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2,\ -\gamma_2 x_1 + \gamma_1 x_2), \\ D_1 = (|x| \neq 0),\ \Pi\{\theta :\ &(1 + \gamma_1)^2 + \gamma_2^2 = 0\} = 0, \\ G_1(r, \varphi) = re^{\alpha\varphi}\ ((r, \varphi)\ &-\ \text{полярні координати}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 :\ \ b(t, x) &= (g_1 x_1,\ g_2 x_2), \\ c(t, x, \theta) &= (\gamma_1 x_1,\ \gamma_2 x_2), \\ D_2 &= (x_1 > 0,\ x_2 > 0), \\ \Pi\{\theta :\ \gamma_i \leq -1\} &= 0,\ i = 1, 2, \\ G_2(x_1, x_2) &= x_2 x_1^{-\alpha}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 : \qquad b(t, x) &= (g_1 x_1,\ g_2 x_1 + g_1 x_2), \\ c(t, x, \theta) &= (\gamma_1 x_1,\ \gamma_2 x_1 + \gamma_1 x_2), \\ D_3 = (x_1 > 0), &\quad \Pi\{\theta :\ \gamma_1 \leq -1\} = 0, \\ G_3(x_1, x_2) &= x_2 x_1^{-1} - \alpha \ln x_1, \end{aligned}$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $g_i = g_i(t, x)$, $\gamma_i = \gamma_i(t, x, \theta)$ $(i = 1, 2)$ – неперервні обмежені функції, $Q_i = [0, \infty) \times D_i$, $i = 1, 2, 3$.

Для вказаних класів систем другого порядку неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь із стрибками знайдено необхідні і достатні умови інваріантності відповідних поверхонь.

Теорема 3.1. *Поверхні $\Gamma_{Q_i}(G_i)$ відповідно для класів K_i, $i=1,2,3$ інваріанті в області Q_i для всіх C ($G(t,x)=C=G(t_0,x_0)$ при всіх $(t_0,x_0)\in Q_i$) тоді і тільки тоді, коли для всіх $(t,x)\in Q_i$ відповідно для $i=1,2,3$ виконуються умови:*

1. Для K_1:

1) $g_1=\alpha g_2$;
2) $a_1(t,x)+\alpha r a_2(t,x)=$
$= \frac{\alpha^2}{2} r g_2^2 - r\int\limits_{\Theta_1}\left(\sqrt{(1+\gamma_1)^2+\gamma_2^2}-\right.$
$\left.-1-\ln\sqrt{(1+\gamma_1)^2+\gamma_2^2}\right)\Pi(d\theta)$;
3) $\ln[(1+\gamma_1)^2+\gamma_2^2]=$
$=-2\alpha\left[\pi\mathbf{1}_{\{1+\gamma_1<0\}}-\frac{\pi}{2}\,sign\gamma_2\mathbf{1}_{\{1+\gamma_1=0\}}\right.$
$\left.-\operatorname{arctg}\frac{\gamma_2}{1+\gamma_1}\mathbf{1}_{\{1+\gamma_1\neq 0\}}\right]$ *за мірою* $\Pi(d\theta)$.

2. Для K_2:

1) $g_2=\alpha g_1$;
2) $x_1a_2(t,x)-\alpha x_2 a_1(t,x)=x_1x_2\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}g_1^2+\right.$
$\left.+\int\limits_{\Theta_1}(\gamma_2-\alpha\gamma_1)\,\Pi(d\theta)\right]$;
3) $\gamma_2=(1+\gamma_1)^\alpha-1$ *за мірою* $\Pi(d\theta)$.

3. Для K_3:

1) $g_2=\alpha g_1$;
2) $-(x_2+\alpha x_1)a_1(t,x)+x_1a_2(t,x)=$
$=x_1^2\left[\frac{\alpha}{2}g_1^2+ +\int\limits_{\Theta_1}(\gamma_2-\alpha\gamma_1)\,\Pi(d\theta)\right]$;
3) $\gamma_2=\alpha[1+\gamma_1]\ln[1+\gamma_1]$ *за мірою* $\Pi(d\theta)$.

4 Доведення основних результатів

Доведення. Для класу K_1 використаємо рівняння для процесу $(|\xi(t)|,\varphi(t))$, де

$$\xi_1(t)=|\xi(t)|\cos\varphi(t),\ \ \xi_2(t)=|\xi(t)|\sin\varphi(t).$$

Для системи (3.1) у випадку $c(t,x,\theta)=0$ при $\theta\in\Theta_1$, $\Theta_2=\mathbb{R}$ при $0<t<\tau=\inf\{t:|\xi(t)|=0\}$ (див. [?]) мають місце рівняння:

$$\begin{cases} dr(t) &= \tilde a_1\,dt+\tilde b_1\,dw(t)+\int\limits_{\mathbb{R}}\tilde c_1\,\nu(dt,d\theta),\\ d\varphi(t) &= \tilde a_2\,dt+\tilde b_2\,dw(t)+\int\limits_{\mathbb{R}}\tilde c_2\,\nu(dt,d\theta),\end{cases} \tag{4.1}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde a_1 &= (a,\lambda)+\frac{1}{2r(t)}(b,\lambda^\perp)^2,\quad \tilde b_1=(b,\lambda),\\
\tilde a_2 &= \frac{(a,\lambda^\perp)}{r(t)}-\frac{1}{r^2(t)}(b,\lambda)(b,\lambda^\perp),\ \ \tilde b_2=\frac{(b,\lambda^\perp)}{r(t)},\\
\tilde c_1 &= \sqrt{r^2(t)+2r(t)(c,\lambda)+|c|^2}-r(t),\\
\tilde c_2 &= \pi\mathbf{1}_{\{r(t)+(c,\lambda)<0\}}\\
&\quad +\frac{\pi}{2}sign(c,\lambda^\perp)\mathbf{1}_{\{r(t)+(c,\lambda)=0\}}\\
&\quad +\operatorname{arctg}\frac{(c,\lambda^\perp)}{r(t)+(c,\lambda)}\mathbf{1}_{\{r(t)+(c,\lambda)\neq 0\}},\\
\lambda &= (\cos\varphi(t),\sin\varphi(t)),\\
\lambda^\perp &= (-\sin\varphi(t),\cos\varphi(t)),\\
a &= (a_i(t,r(t)\cos\varphi(t),r(t)\sin\varphi(t)),i=1,2),\\
b &= (b_i(t,r(t)\cos\varphi(t),r(t)\sin\varphi(t)),i=1,2),\\
c &= (c_i(t,r(t)\cos\varphi(t),r(t)\sin\varphi(t),\theta),i=1,2).
\end{aligned}$$

З формули Іто (2.7) випливає, що у розглядуваному випадку рівняння (4.1) мають вигляд:

$$\begin{cases} dr(t) &= \hat a_1\,dt+\hat b_1\,dw(t)+\int\limits_{\Theta_1}\hat c_1\,\tilde\nu(dt,d\theta)\\ &\quad +\int\limits_{\Theta_2}\hat c_1\,\nu(dt,d\theta),\\ d\varphi(t) &= \hat a_2\,dt+\hat b_2\,dw(t)+\int\limits_{\Theta_1}\hat c_2\,\tilde\nu(dt,d\theta)\\ &\quad +\int\limits_{\Theta_2}\hat c_2\,\nu(dt,d\theta),\end{cases} \tag{4.2}$$

де

$$\begin{aligned}
\hat a_1 &= \tilde a_1+\int\limits_{\Theta_1}\{\tilde c_1-(c,\lambda)\}\,\Pi(d\theta),\quad \hat b_1=\tilde b_1\\
\hat a_2 &= \tilde a_2+\int\limits_{\Theta_1}\left\{\tilde c_2-\frac{(c,\lambda^\perp)}{r(t)}\right\}\Pi(d\theta),\quad \hat b_2=\tilde b_2,\\
\hat c_1 &= \tilde c_1,\quad \hat c_2=\tilde c_2.
\end{aligned}$$

Скористаємось формулами (4.2) і для $r(t)=|\xi(t)|$ та $\varphi(t)$ в класі K_1 отримаємо такі рівності:

$$d|\xi(t)|=\left[\frac{(a,\xi(t))}{|\xi(t)|}+\frac{1}{2}|\xi(t)|g_2^2+|\xi(t)|\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_{\Theta_1}\left\{\left(\sqrt{(1+\gamma_1)^2+\gamma_2^2}-1\right)-\gamma_1\right\}\Pi(d\theta)\right]dt+$$

$$+|\xi(t)|\,[g_1 dw(t)+$$

$$+\int_{\Theta_1}\left(\sqrt{(1+\gamma_1)^2+\gamma_2^2}-1\right)\tilde{\nu}(dt,d\theta)+$$

$$\left.+\int_{\Theta_2}\left(\sqrt{(1+\gamma_1)^2+\gamma_2^2}-1\right)\nu(dt,d\theta)\right],$$

$$d\varphi(t)=$$

$$=\left[\frac{(a,\xi^{\perp}(t))}{|\xi(t)|^2}+g_1g_2+\int_{\Theta_1}\{\hat{\gamma}+\gamma_2\}\ \Pi(d\theta)\right]dt-$$

$$-g_2dw(t)+\int_{\Theta_1}\hat{\gamma}\,\tilde{\nu}(dt,d\theta)+\int_{\Theta_2}\hat{\gamma}\,\nu(dt,d\theta),$$

де

$$\hat{\gamma}=\pi\mathbf{1}_{\{1+\gamma_1<0\}}-\frac{\pi}{2}\,sign\gamma_2\mathbf{1}_{\{1+\gamma_1=0\}}-$$

$$-\mathrm{arctg}\frac{\gamma_2}{(1+\gamma_1)}\mathbf{1}_{\{1+\gamma_1\neq 0\}},$$

$\xi^{\perp}(t)=(-\xi_2(t),\xi_1(t))$,

g_i, γ_i – відповідно функції $g_i(t,\xi(t))$, $\gamma_i(t,\xi(t),\theta)$, $a=a_i(t,\xi(t)), i=1,2$.
За допомогою цих рівнянь, використовуючи умови теореми для класу K_1, отримаємо, що при $0<t<\tau$:

$$dr(t)e^{\alpha\varphi(t)}=0$$

тоді і тільки тоді, коли виконуються умови теореми 3.1 для класу K_1.

Для класів K_2 та K_3 безпосередньо перевіримо, що відповідно в областях Q_2, Q_3 виконуються умови (2.4), (2.5) і (2.6) теореми 2.1 тоді і тільки тоді, коли виконуються умови теореми 3.1 для K_2 та K_3 відповідно.

Маємо:

$$(\nabla G_2(t,x),\,b(t,x))=-\alpha x_2x_1^{-\alpha-1}g_1x_1+x_1^{-\alpha}g_2x_2=$$

$$=x_1^{-\alpha}x_2(-\alpha g_1+g_2)=0;$$

$$LG_2(t,x)=-\alpha x_2x_1^{-\alpha-1}a_1+x_1^{-\alpha}a_2+$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\alpha(\alpha+1)x_2x_1^{-\alpha-2}g_1^2x_1^2-2\alpha x_1^{-\alpha-1}g_1g_2x_1x_2\Big)-$$

$$-x_1^{-\alpha}x_2\int_{\Theta_1}(\gamma_2-\alpha\gamma_1)\,\Pi(d\theta)=$$

$$=x_1^{-\alpha-1}(-\alpha x_2a_1+x_1a_2)+x_1^{-\alpha-1}x_1x_2\times$$

$$\times\left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}g_1^2-\alpha^2g_1^2-\int_{\Theta_1}(\gamma_2-\alpha\gamma_1)\,\Pi(d\theta)\right]=0;$$

$$\Pi\{\theta:\,\triangle_{G_2}(t,x,\theta)\neq 0\}=$$

$$=\Pi\{\theta:\,(x_2+\gamma_2x_2)(x_1+\gamma_1x_1)^{-\alpha}-x_2x_1^{-\alpha}\neq 0\}=$$

$$=\Pi\{\theta:\,x_2x_1^{-\alpha}\Big[(1+\gamma_2)(1+\gamma_1)^{-\alpha}-1\Big]\neq 0\}=0.$$

$$(\nabla G_3(t,x),\,b(t,x))=$$

$$=(-x_2x_1^{-2}-\alpha x_1^{-1})g_1x_1+x_1^{-1}(g_2x_1+g_1x_2)=$$

$$=-\alpha g_1+g_2=0;$$

$$LG_3(t,x)=(-x_2x_1^{-2}-\alpha x_1^{-1})a_1+x_1^{-1}a_2+$$

$$+\frac{1}{2}\Big((2x_2x_1^{-3}+\alpha x_1^{-2})g_1^2x_1^2-2x_1^{-2}g_1x_1(g_2x_1+g_1x_2)\Big)-$$

$$-\int_{\Theta_1}(\gamma_2-\alpha\gamma_1)\,\Pi(d\theta)=x_1^{-2}\,(-a_1x_2-\alpha x_1a_1+$$

$$\left.+x_1a_2-\frac{\alpha}{2}x_1^2g_1^2-x_1^2\int_{\Theta_1}(\gamma_2-\alpha\gamma_1)\,\Pi(d\theta)\right)=0;$$

$$\Pi\{\theta:\,\triangle_{G_3}(t,x,\theta)\neq 0\}=$$

$$=\Pi\{\theta:\,(x_2+\gamma_2x_1+\gamma_1x_2)(x_1+\gamma_1x_1)^{-1}-$$

$$-\alpha\ln(x_1+\gamma_1x_1)-x_2x_1^{-1}+\alpha\ln x_1\neq 0\}=$$

$$=\Pi\{\theta:\,x_1^{-1}\,[x_2+\gamma_2x_1+\gamma_1x_2-$$

$$-\alpha x_1(1+\gamma_1)\ln(1+\gamma_1)-x_2(1+\gamma_1)]\neq 0\}=$$

$$=\Pi\{\theta:\,\gamma_2-\alpha(1+\gamma_1)\ln(1+\gamma_1)\neq 0\}=0.$$

Отже, поверхні $\Gamma_{Q_i}(G_i)$ відповідно для класів K_i, $i=2,3$ інваріанті в області Q_i при всіх C тоді і тільки тоді, коли для всіх $(t,x)\in Q_i$ відповідно при $i=2,3$ виконуються умови теореми 3.1. □

Зауваження

Якщо у розглядуваній системі $c(t,x,\theta) = 0$ при $\theta \in \Theta_1$, $(t,x) \in Q_i$ і виконуються лише умови 1), 2) теореми 3.1 відповідно для класів K_i, $i = 1,2,3$, то розв'язок $\xi(t)$ "дифундує" на поверхнях $\Gamma_{Q_i}(G_i)$ і перестрибує із однієї поверхні на іншу лише в моменти $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ стрибків пуассонівського процесу $\nu([0,t],\Theta_2)$.

Слід зауважити, що коли в системі (3.1) $c(t,x,\theta) = 0$ при $\theta \in \Theta_1$, то достатні умови інваріантності поверхонь $\Gamma_{Q_i}(G_i)$ відповідно для класів K_i, $i = 1,2,3$ наведені у роботі [5].

Висновки

У роботі для певних класів систем другого порядку неоднорідних СДР зі стрибками знайдено необхідні і достатні умови інваріантності відповідних поверхонь. Отримані результати дають можливості знаходження інваріантних поверхонь та умов їх інваріантності для вказаних класів СДР.

Список використаних джерел

1. Куліініч Г.Л. Бабчук В.Г. Інваріантні множини системи лінійних стохастичних диференційних рівнянь Іто другого порядку // Вісник Київського університету – 1976. – Вип. 18. – С. 136–139.
2. Куліініч Г.Л., Кушніренко С.В. Інваріантні множини систем стохастичних диференціальних рівнянь без післядії // Теорія ймовірностей та математична статистика – 2000. – Вип. 63. – С. 115–121.
3. Справочник по теории вероятностей и математической статистике // В.С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин / Под ред. В. С. Королюка. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
4. Куліініч Г.Л., Кушніренко С.В. Інваріантні множини систем стохастичних диференціальних рівнянь із стрибками // Нелінійні коливання. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 234–240.
5. Куліініч Г.Л. Про інваріантні множини систем другого порядку стохастичних диференціальних рівнянь без післядії //Тези доповідей Міжн. наук. конф. "Розробка та застосування математичних методів у науково-технічних дослідженнях", 8 – 10 жовтня 1998 р., м. Львів. Вісник "Прикладна математика". – 1998. – № 337, т. 1. – С. 126–127.

References

1. KULINICH, G. L., BABCHUK V.G. (1976) Invariant sets of system of linear stochastic Ito differential equations of the second order // *Visn. Kyïv. Univ.* , No. 18, P. 136–139.
2. KULINICH, G. L., KUSHNIRENKO, S. V. (2000) Invariant sets for systems of stochastic differential equations without aftereffect // *Theory Probab. Math. Stat.*, **63**, P. 112–118.
3. Handbook on Probability and Mathematical statistics // V.S. Korolyuk, N.I. Portenko, A.V. Skorokhod, A.F. Turbin / Ed. V.S.Korolyuk. – M.: Nauka, 1985. – 640 p.
4. KULINICH, G. L., KUSHNIRENKO, S. V. (2005) Invariant sets of systems of stochastic differential equations with jumps // *Nonlinear Oscillations,* **8**, No. 2, P. 234–240.
5. KULINICH, G. L. (1998) On invariant sets of the system of the second order of stochastic differential equations without aftereffect // Theses of the International science conf. "Development and application of mathematical methods in scientific and technical research", October 8–10, 1998, Lviv. *Bulletin "Applied mathematics".* No. 337, V. 1. – P. 126–127.

Received: 1.09.2022