УДК 621.391: 519.72

DIGITAL FILTER FROM DIFFERENCES EXPONENTIAL MOVING AVERAGES

***Blokhin O.**, Assoc.Prof.*
Kyiv National University of Technologies and Design

Moving averages are widely used in signal processing, economics, technology, and finance during the analysis of random processes, signal with noise [1], [2]. Among the large number of such averages, the exponential moving average is the most popular; as it gives the most priority to the most recent data. Comparing two moving averages with different parameters gives information about the rate of change of a random process. The purpose of the study is to analyze the spectral characteristics of a digital filter constructed from the difference of two exponential moving averages, to describe the frequencies that such a filter strengthens or weakens. One of the most famous indicators of technical analysis, which uses such differences of exponential moving averages, is the indicator MACD. The study of its spectral characteristics was started in works [3], [4].

The exponential moving average is defined by the following difference equation [1], [2]: $y(n)=\alpha x(n)+\beta y(n-1)$ or $y(n)-\beta y(n-1)=\alpha x(n)$; $\alpha+\beta=1$, $0<\alpha,\beta<1$.

The parameter α is related to the width of the filter window N by the formula $\alpha=\frac{2}{N+1}$, $\beta=1-\alpha=\frac{N-1}{N+1}$. Let's perform the z - transformation: $x(n)\longleftrightarrow X(z)$
$y(n)\longleftrightarrow Y(z)$ $\quad Y(z)(1-\beta z^{-1})=\alpha X(z)$ $\quad Y(z)=H(z)X(z)$

Hence follows $H(z)=\frac{\alpha}{1-\beta z^{-1}}$. When substituting $z=\exp(i\omega)$, we get the Fourier transform of the transfer function – the function of the spectral density of the system [1]. We will assume that $M>N$. Thus, $H(\omega)=\left(\frac{\alpha}{1-\beta\exp(-i\omega)}-\frac{\gamma}{1-\delta\exp(-i\omega)}\right)$. By means of simple transformations, it is possible to obtain

$$EMA_N-EMA_M\xrightarrow{z}\frac{M-N}{2}H_\Delta(z)H_N(z)H_M(z)$$

$$\Delta(x(n))=x(n)-x(n-1)$$ [5], [6].

The spectral function of the difference of two exponential moving averages can be represented as $H(\omega)=\frac{M-N}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\beta\exp(-i\omega)}\right)\left(\frac{\gamma}{1-\delta\exp(-i\omega)}\right)(1-\exp(-i\omega))$

Our goal is to find this leading frequency of the filter ω_0, that is, the maximum point of the amplitude spectral density function.

We will consider that $\omega_0=2\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{(N^2-1)(M^2-1)}}$. For sufficiently large values N,M, the approximate formula can be used $\omega_0\approx 2\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{NM}}$. Using the language of periods, we have a formula for the leading period $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, or an approximation $T_0 \approx \pi\sqrt{NM}$. Find the value of the gain at the leading frequency of the filter - the maximum value of the spectral density. We need to find the value of the function $G(x) = (M - N) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (N^2 + 1)x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (M^2 + 1)x}} \cdot \sqrt{x}$ at the point $x_0 = \sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{(N^2 + 1)(M^2 + 1)}}$. $G(x_0) = \frac{M - N}{\sqrt{(N^2 + 1)} + \sqrt{(M^2 + 1)}}$ or for large values N, M , you can use the approximate formula $G(x_0) \approx \frac{M - N}{M + N}$. In the theory of digital filters, an important role is played the ratio of the maximum gain at the leading frequency $G(x_0)$ to the maximum attenuation factor at other frequencies (separation factor). For our filter, the maximum attenuation occurs at $\omega = \pi$. $x(\pi) = \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$. $G(1) = \frac{M - N}{MN}$. Then the separation factor of frequency will be as follows:

$$\frac{G(x_0)}{G(1)} = \frac{M \cdot N}{\sqrt{N^2 + 1} + \sqrt{M^2 + 1}} \approx \frac{M \cdot N}{M + N}$$

References:

1. Koopmans L. H. The spectral analysis of time series. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1995. 366 p.
2. Oppenheim A. V. Schafer R. W. Discrete-Time signal processing. Pearson Education, Limited, 2010. 1137 p.
3. Blokhin O., Zhlali Z. Spectral properties of the MACD indicator // Innovations technologies in science and practice. Proceedings of the VI International Scientific and Practical Conference. Haifa, Israel. 2022. Pp. 464-473.
4. Блохін О.Л., Жлалі Ж.Т. Спектральні властивості індикатора MACD // Матеріали ІІ Всеукраїнської конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених "Інноватика в освіті, науці та бізнесі: виклики та можливості", Київ, 18 листопада 2021 р. К.: КНУТД, 2021. Том 1, с.201-206
5. Блохін О.Л, Бобовський В.Ю. Спектральні властивості скінчених різниць дискретного випадкового процесу// Матеріали І Всеукраїнської конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених "Інноватика в освіті, науці та бізнесі: виклики та можливості", К.: КНУТД, 2020. с 188-193
6. Блохин А.Л., Годз В.Р. Корелограммы разностей случайного процесса.// П'ята міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючи системи" (19 - 21 травня 2020 р.). Збірник праць. За. ред. В. О. Дубка, В. Б. Кисельова - К: ФОП Маслакові, - 2020.с.350-352.
7. Блохін О.Л., Новосад Б. П. Цифровий фільтр з різниці експоненційних ковзних середніх // Матеріали ІІІ Всеукраїнської конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених "Інноватика в освіті, науці та бізнесі: виклики та можливості", К.: КНУТД, 2022.