УДК 517.1 : 519.6

ІМОВІРНІСНО-КОМП'ЮТЕРНИЙ АНАЛІЗ ІГРОВОЇ СТРАТЕГІЇ «МАРТИНГАЛ» В СИТУАЦІЇ СТОХАСТИЧНОЇ ГРИ З ДВОМА АЛЬТЕРНАТИВНИМИ НАСЛІДКАМИ НА КОЖНОМУ КРОЦІ

С.М. Краснитський, доктор фіз.-мат. наук, професор
Київський національний університет технологій та дизайну
Є.Ю. Лисенко, студент
Київський національний університет технологій та дизайну

Ключові слова: стохастична послідовність, стохастична гра, ігрова стратегія, мартингал, безприбуткова гра.

Теорія стохастичних послідовностей, які мають назву мартингалів (суб- і супер- мартингалів), є однією з добре розвинених частин теорії випадкових процесів. В даній доповіді розглядаються стохастичні послідовності, які пов'язані з послідовностями деяких стохастичних ігор. Ігри, які ми маємо на увазі, мають наступні властивості. За умовою, на кожному кроці гри (у дискретному часі) виграш гравця має імовірність p, а програш — імовірність q $(p+q=1)$. Гравець, маючи початковий грошовий капітал x, ставить ту чи іншу суму грошей. При виграші наявний капітал збільшується на поставлену суму, а при програші зменшується на цю ж величину. Послідовність значень поточного капіталу гравця (вона залежить, в тому числі, і від конкретної ігрової стратегії) утворює досліджувану стохастичну послідовність. Вивченню властивостей таких послідовностей присвячена як класична для даної тематики література [1-2], так і більш сучасні роботи, див. наприклад [3,4].

В теорії і в практиці ігрових ситуацій часто розглядається тип стратегій, котрий також має назву «мартингал». Реалізація зазначеної стратегії полягає в тому, що гравець, починаючи зі ставки 1, кожного разу збільшує ставку вдвічі при програші та припиняє гру після збільшення початкового капіталу на одну грошову одиницю або після розорення (в момент, коли залишок від виконаних дій не дозволяє зробити ставку потрібної величини).

В нашій доповіді ми наведемо кілька співвідношень, що характеризують деякі імовірнісні аспекти даної ігрової стратегії. Актуальність питання пов'язана, в тому числі, і з тим, що зі сторінок Інтернету і просто в рекламних об'явах почались свого часу і досі зустрічаються заклики до гри за вказаною стратегією із обіцянками стабільних великих заробітків. Але математичний аналіз зазначеної ситуації не підтверджує вказані заклики.

Позначимо n максимально можливу кількість ставок, які може зробити гравець з початковим капіталом x до закінчення вищеописаної гри. З означення випливає, що n дорівнює кількості розіграшів в грі, яка закінчується розоренням гравця. Враховуючи дії з подвоєнням ставок і умову закінчення гри у момент, коли для продовження не вистачає коштів, приходимо до висновку, що

$$n = [log_2(x+1)],$$

де [] — ціла частина дійсного числа. Звідси одержуємо, що ймовірність Q(x) розорення гравця та ймовірність P(x) виграти одну грошову одиницю, відповідно, задовольняють рівностям

$$Q(x) = q^{\lfloor log_2(x+1) \rfloor}, P(x) = 1 - q^{\lfloor log_2(x+1) \rfloor}.$$

Імовірності виграти грошову одиницю, дійсно, виявляються високими. Наприклад, при x = 15 маємо n = 4, тому у грі «червоне — чорне» при $p = q = 1/2$ маємо $P(15)$ = 0,9735. При менш сприятливій для гравця гри в рулетку, коли у круп’є в розпорядженні варіанти з числами від 0 до 36, а у гравця — від 1 до 36 маємо $p = 18/37, q = 19/37$,і результат майже той самий: $P(15) = 0{,}93046$.

Але подивимось, яким може бути середній виграш гравця, що користується стратегією «мартингал». Для більшої простоти записів розглянемо лише випадок, коли $x + 1 = 2^k, k \in \{1,2,\ldots\}$ (тут в момент розорення гравця залишок від початкового капіталу в точності дорівнює 0) і обчислимо математичне сподівання (інакше, середнє значення) величини остаточного капіталу гравця при даній схемі гри. Згідно з вищесказаним, числових результатів однієї гри при даній стратегії може бути лише два: x + 1 і 0. Тому вказане математичне сподівання дорівнює

$$(x+1) \cdot P(x) + 0 \cdot Q(x) = (x+1)\left(1 - q^{\lfloor log_2(x+1) \rfloor}\right).$$

При $p = q = 1/2$ ця величина дорівнює

$$(x+1)\left(1 - \frac{1}{(x+1)}\right) = x + 1 - 1 = x,$$

тобто маємо гру з **нульовим** середнім виграшем (безприбуткову гру). Близькі міркування показують, що при $p < q$ гра з застосуванням даної стратегії буде збитковою для гравця в середньому. Стратегія «мартингал» вигідна в середньому для гравця лише у випадку $p > q$.

Авторами доповіді розроблено також комп’ютерну програму, що реалізує варіанти зазначеної ігрової стратегії для різних значень p та q.

Список використаних джерел

1. Doob J.L. What is a martingale? // The American Mathematical Monthly. — 1971. — V.78. — P.461-463.
2. Dubbins L.E., Savage L.J. How to gamble if you must. — New York, McGrow-Hill, 1965.
3. Maitra, Ashok P and Sudderth, William D. Discrete Gambling and Stochastic Games, Springer (2008).
4. Kyle Siegrist. How to Gamble If You Must, https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/joma/Volume8/Siegrist/RedBlack.pdf