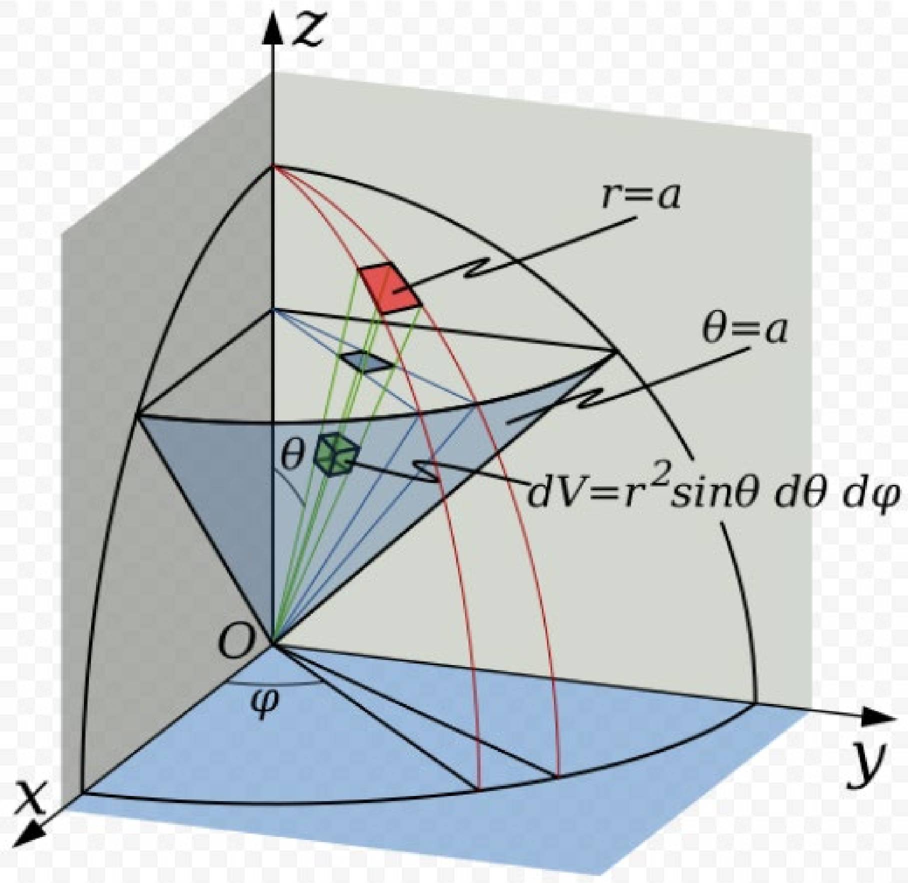
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГІЙ ТА ДИЗАЙНУ

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою Київського національного університету технологій та дизайну для студентів усіх напрямів підготовки факультетів: індустрії моди, економіки та бізнесу, хімічних та біофармацевтичних технологій, мехатроніки та комп'ютерних технологій

К и ї в
2021

УДК 517.3 (075.8)
І-73

Авторський колектив:

П. В. Задерей – д-р фіз.-мат. наук, проф. (розділ IV);

О. А. Лагода – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри ПФВМ КНУТД (розділ ІІ);

О. Б. Нестеренко – канд. фіз.-мат. наук, зав. кафедри ПФВМ КНУТД (розділ І, V);

М. О. Харитонова – канд. фіз.-мат. наук, доцент (передмова, розділ ІІІ).

Рецензенти:

А. В. Чайковський – д-р фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

О. І. Василик – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

О. В. Ковальчук - д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри прикладної фізики та вищої математики Київського національного університету технологій та дизайну

Рекомендовано Вченою радою Київського національного університету технологій та дизайну як навчальний посібник для студентів усіх напрямів підготовки факультетів: індустрії моди, економіки та бізнесу, хімічних та біофармацевтичних технологій, мехатроніки та комп'ютерних технологій (протокол №11 від 30 червня 2021)

І-73 Інтегральне числення: навч. посіб. / Задерей П. В., Лагода О. А., Нестеренко О. Б., Харитонова М. О. Київ: КНУТД, 2021. 216.

ISBN 978-617-7506-94-1

Даний навчальний посібник підготовлений відповідно до робочих програм з дисциплін «Вища математика» та «Вища та прикладна математика».

Посібник містить теоретичні відомості, розв'язання типових задач і завдання для самостійної роботи студентів з розділів курсу «Інтегральне числення». Загальна побудова посібника підпорядкована поставленій навчально-методичній задачі - допомогти студентам підготуватись до різних форм контролю якості засвоєння навчального матеріалу.

УДК 517.3 (075.8)

ISBN 978-617-7506-94-1

ЗМІСТ

Розділ IV. Криволінійні інтеграли

Розділ V. Комплексні числа

П Е Р Е Д М О В А

Сучасна вища освіта перебуває у стані реформування, що пов'язано з введенням обов'язкової комп'ютерної грамотності та суттєвому збільшенню кількості годин для самостійної роботи студентів. Стрімкий розвиток комп'ютерних технологій посприяв тому, що інформація на електронних носіях стала доступною. Все більш затребуваною стала література, придатна для дистанційного навчання. Викладачами університетів розробляються курси лекцій, практичних занять, які перебуватимуть у вільному доступі на певних ресурсах..

Виникає потреба у створенні такої навчальної літератури, яка б враховувала нові вимоги до навчального процесу. В першу чергу мова йде про необхідність допомогти студентам самостійно опановувати теоретичний матеріал та полегшити підготовку до проходження контролю знань у різних формах його проведення.

Даний посібник продовжує цикл навчальних посібників з вищої математики, написаних викладачами кафедри вищої математики КНУТД, і вміщує матеріал, який забезпечує студентам можливість опанування інтегральним численням функцій однієї та багатьох змінних.

Структура посібника така ж як і у двох попередніх частин. Кожний розділ починається з теоретичного матеріалу, що дає можливість студентам не тільки отримати інформацію, необхідну для практичного застосування, але і ознайомитись з основами класичного математичного аналізу. Далі представлена велика кількість типових задач з розв'язаннями, які спираються на викладену теорію, після чого запропоновані завдання для аудиторної та домашньої роботи з відповідями. Крім того, у кожному розділі є блоки однотипних завдань, які можна видавати як індивідуальні завдання.

Посібник має на меті допомогти студентам як денної, так і заочної та дистанційної форм навчання, самостійно (або з допомогою викладача) оволодіти основними методами розв'язання практичних задач. Він також може бути корисним викладачам вищої математики при складанні завдань для тестового контролю.

* * *

Інтегральне числення – розділ математики, в якому вивчають властивості та способи обчислення інтегралів а також їх застосування. Разом з диференціальним численням інтегральне числення складає аналіз нескінченно малих, який лежить в основі прикладних досліджень питань теоретичного природознавства і техніки. До найпростіших і основних задач інтегрального числення відноситься обчислення визначених те невизначених інтегралів функцій однієї дійсної змінної та кратних інтегралів.

Інтегральне числення виникло із задач на обчислення площ та об'ємів. За свідоцтвом ряду джерел, інтегральні прийоми були вперше створені відомим грецьким вченим Демокрітом (5 століття до н.е.), який розглядав тіла, складені з великої кількості дрібних частинок. Але його доведенням бракувало математичної строгості. Суттєвим кроком у подальшому розвитку інтегрального числення став *метод вичерпувань*. Давньогрецький математик, фізик та інженер Архімед (бл.287 – 212 до н.е.) у творі «Про вимір довжини кола» розглянув задачу про знаходження довжини кола та площі круга., в яких він удосконалив і віртуозно застосував метод «вичерпувань», в основу якого покладено геометричні міркування.

При знаходженні площі фігури за допомогою методу «вичерпувань» потрібно було виконати певні кроки, а саме:

– у задану фігуру вписати монотонну послідовність простих фігур, площі яких легко обчислюються;

– довести, що монотонно зростаюча послідовність сумарних площ всіх вписаних фігур наближається до площі розглянутої фігури; тобто, одержуючи все більш «тісні» нерівності, досягти як завгодно близького їх наближення до рівності;

– висунути гіпотезу, що послідовність сумарних площ наближається до одного певного числа A, яке і визначає площу фігури;

– довести, що супротивне припущення приводить до протиріччя.

Оскільки загальна теорія границь на той час не була розроблена (греки уникали поняття нескінченності), усі кроки методу «вичерпувань», включаючи обґрунтування єдиності границі, щоразу повторювались при розв’язанні кожної конкретної задачі.

Серед різних прийомів Архімеда зустрічались справжні інтеграційні методи. Але Архімед не виділив спільного змісту інтеграційних прийомів і поняття інтеграла та не створив алгоритма інтегрального числення.

Прорив у розвитку інтегрального числення відбувся у 16 ст. та 17ст., коли розвиток механіки, астрономії та інших природничих наук поставив перед математикою ряд нових задач. Вчені, в першу чергу Ф. Кавльєрі (1598 – 1647), удосконалили метод вичерпувань, створивши *метод неподільних,* який полягає в тому, що кожну фігуру можна представити як сукупність паралельних відрізків з нульовою шириною (неподільних), проведених паралельно до деякої прямої (*регуле*). Одержану сукупність паралельних відрізків без зміни їх довжини потім об’єднували і утворювали іншу фігуру, спосіб обчислення площі якої був відомий.

Надзвичайно важливі для становленні інтегрального числення результати належать І. Ньютону (1643 – 1727) та Г. Лейбніцу (1646 – 1716), які незалежно один від одного встановили взємозв’язок між операціями диференціювання та інтегрування. Лейбніц створив єдину систему взаємопов’язаних понять аналіза, що дозволило виконувати дії з нескінченно малими за певним алгоритмом. Він дав означення диференціала та інтеграла. Символ інтеграла $\int$ належить Лейбніцу, а термін «інтеграл» запропонував І. Бернуллі (1667 – 1748).

Інтегральне числення в класичному вигляді було створено у 19 ст., завдячуючи, в першу чергу, французькому математику О. Коші (1789 – 1857).

Розділ I. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. ПЕРВІСНА. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ВЛАСТИВОСТІ

Основна задача диференціального числення полягає в тому, щоб знайти похідну заданої функції $y = f(x)$. Але багато питань математики приводять до оберненої задачі: для заданої функції $f(x)$ знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнювала б $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Таку операцію називають ***операцією інтегрування***, а розділ математики – ***інтегральним численням***.

Означення. Диференційовну функцію $F(x)$ називають ***первісною функції*** $f(x)$ ***на проміжку*** (a, b), якщо для довільного x на цьому проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад. Нехай $f(x) = \cos x$. Тоді за первісну можна взяти функцію $F_1(x) = \sin x$, оскільки $(\sin x)' = \cos x$. Зауважимо, що в прикладі за шукану функцію можна взяти і функції

$$F_2(x) = \sin x + 5 \qquad \Rightarrow \qquad (\sin x + 5)' = \cos x,$$

$$F_3(x) = \sin x + 15 \qquad \Rightarrow \qquad (\sin x + 15)' = \cos x.$$

Отже, якщо $y = F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то й функція $F(x) + C$, де C – стала, теж є первісною.

Теорема. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку (a, b), то всі первісні для $f(x)$ мають вигляд $F(x) + C$, де $C = \text{const}$.

Означення. Якщо функція $F(x)$ є первісною на проміжку (a, b), то вираз $F(x) + C$, де $C = \text{const}$, називається ***невизначеним інтегралом функції*** $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$.

Символ $\int$ – знак інтеграла, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування.

Таким чином

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (1.1)$$

З погляду геометрії невизначений інтеграл є множиною кривих, кожна з яких називається ***інтегральною кривою*** і утворюється зсувом однієї з них паралельно самій собі уздовж осі Oy. Щоб з цієї множини виділити певну інтегральну криву $F(x)$, достатньо задати її значення $F(x_0) = y_0$ в якій-небудь точці $x_0 \in (a;b)$.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1°. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2°. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3°. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4°. Сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

5°. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6°. Якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

і $u = u(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\boxed{\int f(u)du = F(u) + C}. \qquad (1.2)$$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int du = u + C$.	2. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$.	$\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C$.
5. $\int e^{u} du = e^{u} + C$.	6. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$.
7. $\int \cos u\, du = \sin u + C$.	8. $\int \dfrac{du}{\cos^{2} u} = \operatorname{tg} u + C$.
9. $\int \dfrac{du}{\sin^{2} u} = -\operatorname{ctg} u + C$.	10. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$
11. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$.	12. $\int \dfrac{du}{a^{2}+u^{2}} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C$.
13. $\int \dfrac{du}{u^{2}-a^{2}} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$.	14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$.
15. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\right\rvert + C$.	

1.2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

До основних методів інтегрування належать: *метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки* та *метод інтегрування частинами*.

Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод ґрунтується на використанні таблиці інтегралів та основних властивостей невизначеного інтеграла.

Приклади. Обчислити інтеграли:

а) $\int \dfrac{x+5}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} + 10\sqrt{x} + C$;

б) $\int \frac{x^2-3}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1-3}{x^2+1}dx = \int \left(1-\frac{4}{x^2+1}\right)dx = x - 4\operatorname{arctg} x + C$;

в) $\int \frac{4^x+6^x}{2^x}dx = \int \left(\frac{4^x}{2^x}+\frac{6^x}{2^x}\right)dx = \int \left(2^x+3^x\right)dx = \frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}+C$;

г) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+(3)^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$;

д) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \operatorname{tg} x - x + C$.

Метод заміни змінної (метод підстановки)

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дає змогу звести знаходження даного інтеграла до відшукання табличного інтеграла. Даний метод ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема. *Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку (a, b), тобто $\int f(x)dx = F(x)+C$, і нехай функція $x = x(t)$ визначена і диференційовна на проміжку (t_1, t_2), тоді*

$$\int f(x)dx = \int f\left(x(t)\right)x'_t dt = F\left(x(t)\right)+C. \quad (1.3)$$

Практично зручнішим є такий запис:

1. $\int f(x)dx = \int f\left(x(t)\right)x'_t dt = \int f\left(x(t)\right)d\left(x(t)\right) = \left| \begin{matrix} x(t)=u \\ d\left(x(t)\right)=du \end{matrix} \right| =$

$$= \int f(u)du = F(u)+C. \quad (1.4)$$

2. $\int f(x)dx = \int f\left(x(t)\right)x'_t dt$, причому функція $x(t)$ має неперервну похідну.

Зауваження. Після інтегрування методом заміни змінної потрібно перейти до заданої змінної.

Наслідок 1. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$.

Наслідок 2. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Приклади.

1. $$\int \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{matrix} 2x+1=t^2, & x=\dfrac{t^2-1}{2} \\ 2x=t^2-1, & dx=tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{tdt}{3+t} = \int \frac{t+3-3}{t+3}dt = \int \left(1-\frac{3}{t+3}\right)dt =$$

$$= t-3\ln|t+3|+C = \sqrt{2x+1}-3\ln\left|\sqrt{2x+1}+3\right|+C.$$

2. $$\int \frac{dx}{e^x+4} = \left| \begin{matrix} t=e^x+4, & x=\ln|t-4| \\ e^x=t-4, & dx=\dfrac{dt}{t-4} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{(t-4)t} = \int \frac{dt}{t^2-4t+4-4} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-2)^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-4}{t}\right|+C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x}{e^x+4}\right|+C.$$

Метод інтегрування частинами

Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ визначені та диференційовні на проміжку (a,b), то

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}. \tag{1.5}$$

Ця формула називається ***формулою інтегрування частинами***.

На практиці для застосування формули (1.5) підінтегральний вираз розбивається на два множники – u і dv, потім диференціюванням u знаходять du, а інтегруванням dv – знаходимо v: $du = u'(x)dx,\ v=\int dv$.

Деякі типи інтегралів, які зручно знаходити методом інтегрування частинами.

1. В інтегралах вигляду

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx,\ \int P_n(x)\sin\alpha x dx,\ \int P_n(x)\cos\alpha x dx,$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, за u слід узяти $P_n(x)$, а за dv – вирази $e^{\alpha x}$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$.

2. В інтегралах вигляду

$$\int P_n(x)\ln^n x dx,\ \int P_n(x)\arcsin x dx,\ \int P_n(x)\arccos x dx,$$

$$\int P_n(x)\operatorname{arctg} x dx,\ \int P_n(x)\operatorname{arcctg} x dx$$

за функцію u позначають вирази: $\ln^n x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, а за

$dv - P_n(x)dx$.

3. В інтегралах вигляду

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx,\ \int e^{\alpha x}\cos\beta x dx,$$

де α,β – дійсні числа. Після дворазового застосування методу інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Вибір функції u в даному випадку довільний.

Приклади.

1. $$\int(2x+1)\sin x dx = \left|\begin{array}{l} u = 2x+1,\ du = 2dx \\ \quad dv = \sin x dx, \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}\right| = -(2x+1)\cos x + \int \cos x 2dx =$$

$$= -(2x+1)\cos x + 2\int \cos x dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C.$$

2. $$\int x^2 \ln x dx = \left|\begin{array}{ll} u = \ln x, & dv = x^2 dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{array}\right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

3. $$\int e^{2x}\cos x dx = \left|\begin{array}{ll} u = e^{2x}, & dv = \cos x dx \\ du = 2e^{2x}dx, & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array}\right| = e^{2x}\sin x - 2\int \sin x\cdot e^{2x}dx =$$

$$= e^{2x}\sin x - 2\int \sin x\cdot e^{2x}dx = \left|\begin{array}{ll} u = e^{2x}, & dv = \sin x dx \\ du = 2e^{2x}dx, & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}\right| = e^{2x}\sin x -$$

$$-2\left(-e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x dx\right) = e^{2x}\cdot\sin x + 2e^{2x}\cdot\cos x - 4\int e^{2x}\cos x dx.$$

Позначимо $I = \int e^{2x}\cos x dx$ і отримаємо:

$$I = e^{2x}\sin x + 2e^{x}\cos x - 4I, \qquad 5I = e^{2x}\sin x + 2e^{x}\cos x;$$

$$I=\frac{1}{5}\left(e^{2x}\cdot\sin x+2e^{x}\cdot\cos x\right),\qquad \text{отже,}$$

$$\int e^{2x}\cos x dx=\frac{1}{5}\left(e^{2x}\cdot\sin x+2e^{x}\cdot\cos x\right)+C\,.$$

1.3. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН У ЗНАМЕННИКУ

До таких інтегралів відносяться:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$; **3.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

2. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$; **4.** $\displaystyle\int\frac{Lx+K}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Підстановкою $\boxed{x=t-\dfrac{b}{2a},\ dx=dt}$ або виділенням повного квадрату у квадратному тричлені, наведені інтеграли можна звести до табличних.

Приклад.

$$\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\left|\begin{array}{ll} x=t-\dfrac{b}{2a}=t-1, & \begin{array}{l} dx=dt \\ t=x+1\end{array}\end{array}\right|=\int\frac{3(t-1)-2}{\sqrt{3-2(t-1)-(t-1)^2}}dt=$$

$$=\int\frac{(3t-5)dt}{\sqrt{3-\underline{2t}+2-t^2+\underline{2t}-1}}=\int\frac{3t-5}{\sqrt{4-t^2}}dt=3\int\frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}}-5\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{4-t^2}-5\arcsin\frac{t}{2}+C=-3\sqrt{4-(x+1)^2}-5\arcsin\frac{x+1}{2}+C=$$

$$=-3\sqrt{3-2x-x^2}-5\arcsin\frac{x+1}{2}+C\,.$$

Приклад.

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=\int\frac{dx}{(x-2)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C\,.$$

1.4. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо дробово-раціональну функцію

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Якщо $m \geq n$, то дріб називають ***неправильним***, а якщо $m < n$ – ***правильним***.

Для випадку $m \geq n$, виконавши ділення, отримаємо

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = W(x) + \frac{R_k(x)}{P_n(x)},$$

де $W(x)$ – ціла частина-многочлен, $k < n$, тобто $\dfrac{R_k(x)}{P_n(x)}$ – правильний дріб.

Відомо, що правильний раціональний дріб розкладається на суму простих дробово-раціональних функцій типу:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; **II.** $\dfrac{A}{(x-a)^n}, n \neq 1$; **III.** $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; **IV.** $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}, n > 1$.

Проінтегруємо ці дроби:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$.

3. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \begin{vmatrix} x = t - \dfrac{p}{2} \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{M\left(t-\dfrac{p}{2}\right)+N}{\left(t-\dfrac{p}{2}\right)^2 + p\left(t-\dfrac{p}{2}\right)+q}dt =$

$$= M\int \frac{dt}{t^2 + \left(q - \dfrac{p^2}{4}\right)} + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2 + \left(q - \dfrac{p^2}{4}\right)}.$$

Обидва отримані інтеграли - табличні.

4. $$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \begin{vmatrix} x=t-\dfrac{p}{2} \\ dx=dt \end{vmatrix} = M\int \frac{tdt}{\left(t^2+q-\dfrac{p^2}{4}\right)^n} +$$

$$+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+q-\dfrac{p^2}{4}\right)^n}.$$

Перший з отриманих інтегралів обчислюється безпосередньо, а другий – за рекурентною формулою.

Правильний раціональний дріб розкладається на суму раціональних дробів. Щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб, спершу, потрібно розкласти знаменник на найпростіші множники і записати розклад даного дробу на суму елементарних.

Нехай знаменник правильного раціонального дробу $\dfrac{R_k(x)}{P_n(x)}$ розкладено на множники $P_n(x)=a_0(x-a)^{\alpha}\cdot\ldots\cdot(x-b)^{\beta}\cdot\left(x^2+px+q\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^2+lx+s\right)$, тоді цей дріб можна подати у вигляді:

$$\frac{R_k(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\ldots+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}}+$$

$$+\frac{Mx+N}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{Dx+E}{x^2+lx+s}.$$

Типові випадки:

---

1. Якщо $P_n(x)=\left(x-a_1\right)\cdot\left(x-a_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-a_n\right)$, тоді

$$\frac{R_k(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

2. Якщо $P_n(x)=\left(x-a_1\right)\cdot\left(x-a_2\right)\cdot(x-b)^s$, тоді

$$\frac{R_k(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_s}{(x-b)^s}.$$

3. Якщо $P_n(x)=(x-a)\cdot(x-b)^s\cdot\left(x^2+px+q\right)$, причому квадратний тричлен має від’ємний дискримінант $p^2-4q<0$, то

$$\frac{R_k(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{B_s}{(x-b)^s}+\frac{Dx+E}{x^2+px+q}.$$

Приклад. Обчислити інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2}.$$

Підінтегральна функція − правильний дріб, знаменник якого можна розкласти на множники: $x^4+x^2=x^2\left(x^2+1\right)$. Тоді

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Зводимо отримані дроби до спільного знаменника

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{Ax\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+x^2(Cx+D)}{x^2\left(x^2+1\right)}.$$

Дроби рівні, знаменники дробів рівні, тому і їхні чисельники рівні:

$$1=Ax\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+x^2(Cx+D).$$

Многочлени рівні, коли рівні коефіцієнти при відповідних степенях x. Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x і отримаємо

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0 \\ x^2 & B+D=0 \\ x & A=0 \\ x^0 & B=1 \end{array}\qquad A=0,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=-1;$$

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1};$$

$$\int\frac{dx}{x^2\left(x^2+1\right)}=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$$

1.5. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ФУНКЦІЙ

Інтеграли від ірраціональних і трансцендентних функцій зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановок. Розглянемо підстановки для певних видів інтегралів. Надалі під $R(u,v,\ldots,z)$ будемо розуміти раціональну функцію, тобто функцію над аргументами $u,v,...,z$ якої та дійсними числами проводиться скінчена кількість операцій додавання, віднімання, множення і ділення.

1. Інтеграли вигляду $\displaystyle\int R\left(\frac{ax+b}{cx+d},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},\ \dots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$.

Підстановка $\boxed{\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k}$, де k – спільний знаменник дробів $\dfrac{m}{n},\ \dots,\ \dfrac{r}{s}$ дозволяє звести дані інтеграли до інтегралів від дробово раціональних функцій.

2. Інтеграли вигляду $\displaystyle\int R\Big((ax+b),\ (ax+b)^{m/n},\ \dots,\ (ax+b)^{r/s}\Big)dx$.

Підстановка $\boxed{ax+b=t^k,\ dx=\dfrac{k}{a}t^{k-1}dt}$, де k – спільний знаменник дробів $\dfrac{m}{n},\ \dots,\ \dfrac{r}{s}$, раціоналізує дані інтеграли.

3. Інтеграли вигляду $\displaystyle\int R\Big(x,\ x^{m/n},\ \dots,\ x^{r/s}\Big)dx$.

Підстановка $\boxed{x=t^k,\quad dx=kt^{k-1}dt}$, де k – спільний знаменник дробів $\dfrac{m}{n},\ \dots,\ \dfrac{r}{s}$.

4. Інтеграли вигляду $\displaystyle\int \sin^m x\cos^n xdx$, де n – непарне число $(n=2p+1)$

$$\int \sin^m x\cos^{2p+1} xdx=\int \sin^m x\cos^{2p} x\cos xdx=\left|\cos xdx=d(\sin x)\right|=$$

$=\displaystyle\int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^p d(\sin x)$ $\Rightarrow$ виконавши дії, отримаємо табличні інтеграли.

Інтеграли вигляду $\displaystyle\int \sin^n x\cos^m xdx$, де n – непарне число $(n=2p+1)$

$$\int \sin^{2p+1} x\cos^m xdx=\int \sin^{2p} x\cos^m x\sin xdx=\left|\sin xdx=-d(\cos x)\right|=$$

$=-\displaystyle\int \left(1-\cos^2 x\right)^p \cos^m xd(\cos x)$ $\Rightarrow$ виконавши дії, отримаємо табличні інтеграли.

5. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx = \begin{vmatrix} m = 2q \\ n = 2p \end{vmatrix} = \int \sin^{2q} x \cos^{2p} x dx =$

$$= \left| \begin{matrix} \text{за допомогою формул} \\ \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{matrix} \right| = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^q \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^p dx \Rightarrow$$

виконавши дії, отримаємо або табличні інтеграли, або інтеграли вигляду або **4**, або **5**.

6. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \ \cos x) dx$, за допомогою ***універсальної тригонометричної підстановки*** $\boxed{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, зводять до інтегралів від раціональних функцій, використовуючи при цьому співвідношення

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad ,$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

7. Інтеграли вигляду $\int R\left(e^x\right) dx \to$ *підстановка* $t = e^x$.

8. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \ \sqrt{a^2 - x^2} \right) dx \to$ *підстановка* $x = a \sin t$.

9. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \ \sqrt{a^2 + x^2} \right) dx \to$ *підстановка* $x = a \operatorname{tg} t$.

10. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \ \sqrt{x^2 - a^2} \right) dx \to$ *підстановка* $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

11. Інтеграли вигляду $\int R(\operatorname{tg} x) dx \to$ *підстановка* $t = \operatorname{tg} x$.

12.Інтеграли вигляду

$$\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx, \ \int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx, \ \int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$$

за допомогою відомих формул

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\big),\\&\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\big),\\&\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\big)\end{aligned}} \qquad (1.6)$$

можна розкласти на суму інтегралів.

Приклади.

1. $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{\cos^4 x}dx=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}d(\cos x)=-\int\cos^{-4}xd(\cos x)+$

$$+\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}=-\frac{\cos^{-3}x}{-3}+\frac{\cos^{-1}x}{-1}+C=\frac{3}{\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.$$

2. $\displaystyle\int\cos^4 xdx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=$

$$=\frac{1}{4}(x+\sin 2x)+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C=$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\cos x}=\left|\begin{matrix}t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, & x=2\operatorname{arctg}t\\ dx=\frac{2dt}{t^2+1}, & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{2dt}{\left(t^2+1\right)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$

$$=\int\frac{2dt}{2t^2+2+1-t^2}=\int\frac{2dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C.$$

4. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=2\sin t\\ dx=2\cos tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt}{4\sin^2 t}=\int\frac{2\cos t\cdot 2\cos t}{4\sin^2 t}dt=$

$$=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt==-\operatorname{ctg}t-t+C=-\frac{\cos t}{\sin t}-t+C=$$

$$=C-\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}}-\arcsin\frac{x}{2}=C-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{2}.$$

§2. ТИПОВІ ЗАДАЧІ З РОЗВ’ЯЗАННЯМ

2.1. ПЕРВІСНА. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ВЛАСТИВОСТІ

Приклади. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int dx$; 2) $\int d(\sin x)$; 3) $\int d\left(x^2-3\right)$.

Розв’язання. Завдяки властивості інтегралів 2° одержимо:

1) $\int dx=x+C$;

2) $\int d(\sin x)=\sin x+C$;

3) $\int d\left(x^2-3\right)=x^2-3+C.$

Приклади. Обчислити інтеграли:

1) $\int x^5dx$; 2) $\int x\sqrt[3]{x}dx$; 3) $\int\left(x^3-8x^7+2x-1\right)dx$; 4) $\int\left(1-3^x\right)^2dx$;

5) $\int\frac{3x^2-2\sqrt{x^3}e^x+7x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$; 6) $\int\frac{\sin^3 x-5}{\sin^2 x}dx$;

7) $\int\frac{4\cdot 3^x-5\cdot 2^x+e^x}{2^x}dx$; 8) $\int\frac{dx}{3+x}$; 9) $\int\frac{dx}{x^2+6}$; 10) $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-2}{3}dx.$

Розв’язання.

1) Використаємо формулу 2 таблиці основних інтегралів за умови, що $u=x,$ а $\alpha=5$. Одержимо

$$\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+C.$$

2) Застосовуємо формулу 2 таблиці основних інтегралів

$$\int x\sqrt[3]{x}dx=\int x\cdot x^{1/3}dx=\int x^{4/3}dx=\frac{x^{7/3}\cdot 3}{7}+C=\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C\,.$$

3) Використаємо властивості і таблицю інтегралів

$$\int\left(x^3-8x^7+2x-1\right)dx=\int x^3dx-8\int x^7dx+2\int xdx-\int dx=\frac{x^4}{4}-8\cdot\frac{x^8}{8}+2\cdot\frac{x^2}{2}-x+C=$$

$$=\frac{1}{4}x^4-x^8+x^2-x+C.$$

4) Насамперед піднесемо до квадрату підінтегральну функцію, а потім проінтегруємо алгебраїчну суму

$$\int\left(1-3^x\right)^2dx=\int\left(1-2\cdot3^x+3^{2x}\right)dx=\int dx-2\int 3^x dx+\int 9^x dx=$$

$$=x-2\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{9^x}{\ln 9}+C.$$

5) Розділимо чисельник на знаменник почленно і проінтегруємо одержану алгебраїчну суму

$$\int\frac{3x^2-2\sqrt{x^3}e^x+7x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx=3\int\frac{x^2}{x\sqrt{x}}dx-2\int\frac{\sqrt{x^3}e^x}{x\sqrt{x}}dx+7\int\frac{x}{x\sqrt{x}}dx-\int\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx=$$

$$=3\int\sqrt{x}\,dx-2\int e^xdx+7\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-\int\frac{dx}{x}=3\int x^{1/2}dx-2e^x+7\int x^{-1/2}dx-\ln|x|=$$

$$=3\cdot\frac{x^{3/2}\cdot 2}{3}-2e^x+7\cdot\frac{x^{1/2}\cdot 2}{1}-\ln|x|+C=2\sqrt{x^3}-2e^x+14\sqrt{x}-\ln|x|+C\,.$$

6) $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x-5}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x}dx-5\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\sin x\,dx-5\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cos x+5ctg\,x+C.$

<u>Приклади.</u> Знайти інтеграли, користуючись властивістю про інваріантність формул інтегрування:

1) $\int (x+7)^9 dx$; 2) $\int \frac{dx}{(2x-5)^3}$; 3) $\int x\sqrt{x^2-4}\,dx$; 4) $\int \frac{x^6}{\sqrt[3]{2-x^7}}dx$;

5) $\int \cos(2x+3)dx$; 6) $\int tg(2x-3)dx$; 7) $\int \frac{dx}{5x-3}$; 8) $\int \frac{x^2dx}{x^3+9}$; 9) $\int a^{-x+1}dx$;

10) $\int e^{3x+2}dx$; 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$; 12) $\int \frac{2+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 13) $\int \frac{3x-4}{x^2+7}dx$.

Розв'язання.

1) $$\int (x+7)^9 dx = \left| \begin{matrix} u = x+7 \\ du = dx \end{matrix} \right| = \int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{(x+7)^{10}}{10} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{(2x-5)^3} = \left| \begin{matrix} u = 2x-5 \\ du = 2dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x-5)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\int u^{-3}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-2}}{-2} + C =$$
$$= -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(2x-5)^2} + C.$$

3) $$\int x\sqrt{x^2-4}dx = \left| \begin{matrix} u = x^2-4, \\ du = 2xdx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2-4}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}\cdot 2}{3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{u^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-4\right)^3} + C.$$

4) $$\int \frac{x^6dx}{\sqrt[3]{2-x^7}} = \left| \begin{matrix} u = 2-x^7 \\ du = -7x^6dx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{7}\int \frac{(-7)x^6dx}{\sqrt[3]{2-x^7}} = -\frac{1}{7}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = -\frac{1}{7}\int u^{-1/3}du =$$
$$= -\frac{u^{2/3}\cdot 3}{7\cdot 2} + C = -\frac{3}{14}\sqrt[3]{u^2} + C = -\frac{3}{14}\sqrt[3]{\left(2-x^7\right)^2} + C.$$

5) $$\int \cos(2x+3)\,dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+3, \\ du = 2dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C.$$

6) $$\int tg(2x-3)\,dx = \left| \begin{matrix} u = 2x-3, \\ du = 2dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int tg u du = -\frac{1}{2}\ln|\cos u| + C = -\frac{1}{2}\ln|\cos(2x-3)| + C.$$

7) $$\int \frac{dx}{5x-3} = \left| \begin{matrix} u = 5x-3, \\ du = 5dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|5x-3| + C.$$

8) $\int \frac{x^2dx}{x^3+9} = \begin{vmatrix} u = x^3+9, \\ du = 3x^2dx \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+9\right| + C.$

9) $\int a^{-x+1}dx = \begin{vmatrix} u = -x+1 \\ du = -dx \end{vmatrix} = -\int a^u du = -\frac{a^u}{\ln a} + C = -\frac{a^{-x+1}}{\ln a} + C.$

10) $\int e^{3x+2}dx = \begin{vmatrix} u = 3x+2 \\ du = 3dx \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{3x+2} + C.$

11) $\int \frac{dx}{9x^2+4} = \int \frac{dx}{(3x)^2+2^2} = \begin{vmatrix} u = 3x, \ a = 2 \\ du = 3dx \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + C =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{3x}{2} + C = \frac{1}{6}arctg\frac{3x}{2} + C.$

12) $\int \frac{2+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = I.$

Оскільки

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$ а

$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} u = 1-x^2 \\ du = -2xdx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = -\frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{u} + C =$

$= -\sqrt{1-x^2} + C,$

то $I = 2arc\sin x - \sqrt{1-x^2} + C.$

13) $\int \frac{3x-4}{x^2+7}dx = \int \frac{3x\,dx}{x^2+7} - \int \frac{4dx}{x^2+7} = 3\int \frac{x\,dx}{x^2+7} - 4\int \frac{dx}{x^2+7} = I\ .$

Оскільки

$\int \frac{x\,dx}{x^2+7} = \begin{vmatrix} u = x^2+7 \\ du = 2xdx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+7\right| + C,$

$$\int \frac{dx}{x^2+7} = \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} arctg \frac{x}{\sqrt{7}} + C,$$

то $\quad I = 3\ln\left(x^2+7\right) - \frac{4}{\sqrt{7}} arctg \frac{x}{\sqrt{7}} + C.$

Розглянемо метод виділення цілої частини підінтегрального дробу і метод виділення повного квадрату.

Приклади . Знайти інтеграли:

$$1) \int \frac{x}{x+2} dx; \;\; 2) \int \frac{x^2+1}{x^2+3} dx; \;\; 3) \int \frac{x^3+1}{x-3} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{x^2+4x-2}; \qquad 5) \int \frac{dx}{x^2-3x+7}; \qquad 6) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}};$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}; \qquad 8) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x-5}}.$$

Розв'язання.

В прикладах 1) – 3) виділимо цілу частину дробової функції, користуючись правилом ділення многочлена на многочлен.

$$1) \int \frac{x+2-2}{x+2} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x+2} = x - 2\ln|x+2| + C.$$

$$2) \int \frac{x^2+1}{x^2+3} dx = \left| \begin{array}{r|l} -\,x^2+1 & x^2+3 \\ x^2+3 & \overline{\;1\;} \\ \hline -2 & \end{array} ; \quad \frac{x^2+1}{x^2+3} = 1 + \frac{-2}{x^2+3} \right| = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+3}\right) dx =$$

$$= \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+3} = x - \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C\,.$$

3) $$\int \frac{x^3+1}{x-3}dx = \left| \begin{array}{l} \begin{array}{r|l} -\,x^3+1 & x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} & \overline{x^2+3x+9}; \\ -\,3x^2+1 & \\ \underline{3x^2-9x} & \\ -\,9x+1 & \\ \underline{9x-27} & \\ 28 & \end{array} \qquad \dfrac{x^3+1}{x-3} = x^2+3x+9+\dfrac{28}{x-3} \end{array} \right| =$$

$$= \int\left(x^2+3x+9+\frac{28}{x-3} \right) dx == \int x^2 dx + 3\int x\,dx + 9\int dx + 28\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+9x+28\ln|x-3|+C.$$

В прикладах **4) – 8)** виділимо повний квадрат у знаменнику дробу

4) $$\int \frac{dx}{x^2+4x-2} = \left| \begin{array}{l} x^2+4x-2 = x^2+4x+4-4-2 = \\ = (x+2)^2-4-2 = (x+2)^2-6 \end{array} \right| = \int \frac{dx}{(x+2)^2-6} = \left| \begin{array}{l} x+2=u \\ x=u-2 \\ dx=du \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u^2-\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{6}}{u+\sqrt{6}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{6}}{x+2+\sqrt{6}}\right| + C.$$

Заміна змінної при обчисленні такого типу інтегралів не є обов’язковою, тому деякі наступні приклади будемо розв’язувати без заміни змінної.

5) $$\int \frac{dx}{x^2-3x+7} = \left| \begin{array}{l} x^2-3x+7 = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+7 = \\ = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{19}{4} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{19}{4}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{19}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{19}} arctg \frac{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{19}} + C = \frac{2}{\sqrt{19}} arctg \frac{2x-3}{\sqrt{19}} + C.$$

6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \left| \begin{array}{l} x^2+2x+4 = (x+1)^2-1+4 = \\ = (x+1)^2+3 \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+3}} =$$

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right| + C.$$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 3-x-x^2 = -\left(x^2+x-3\right) = -\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3\right) = \\ = -\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right) = \frac{13}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{13}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = arc\sin\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{13}} + C = arc\sin\frac{2x+1}{\sqrt{13}} + C.$$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x-5}} = \left| \begin{array}{l} 4x^2-8x-5 = (2x-2)^2 - 4 - 5 = \\ (2x-2)^2 - 9 \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-2)^2-9}} = \left| \begin{array}{l} u = 2x-2 \\ du = 2dx \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{(2x-2)^2-9}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-9}} = \frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-9}\right| + C =$$

$$= 2\ln\left|2x-2+\sqrt{4x^2-8x-5}\right| + C.$$

2.2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Метод заміни змінної

Приклади. Знайти інтеграли:

$$1)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{x-3}+2}; \qquad 2)\ \int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$$

$$3)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}; \qquad 4)\ \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}; \qquad 5)\ \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+2}}.$$

Розв'язання.

1) Для того, щоб позбутися кореня під знаком інтеграла, зробимо заміну змінної

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x-3}+2} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-3}=t \\ x=t^2+3 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^2+3\right)\cdot 2t\,dt}{t+2} = 2\int \frac{t^3+3t}{t+2}dt = \left| \begin{array}{l|l} -\,t^3+3t & t+2 \\ \quad t^3+2t^2 & \overline{t^2-2t+7} \\ \hline \quad -\,-2t^2+3t & \\ \qquad -2t^2-4t & \\ \hline \qquad\quad -\,7t & \\ \qquad\qquad 7t+14 & \\ \hline \qquad\qquad -14 & \end{array} \right| =$$

$$= 2\int\left(t^2-2t+7-\frac{14}{t+2}\right)dt = 2\int t^2dt - 4\int tdt + 14\int dt - 28\int\frac{dt}{t+2} =$$

$$= 2\cdot\frac{t^3}{3} - 4\cdot\frac{t^2}{2} + 14t - 28\ln\left|t+2\right| + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left(x-3\right)^3} - 2\left(x-3\right) + 14\sqrt{\left(x-3\right)} - 28\ln\left|\sqrt{\left(x-3\right)}+2\right| + C;$$

2) $$\int\frac{\cos\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{x}=t,\ \sqrt[3]{x^2}=t^2 \\ x=t^3,\ dx=3t^2dt \end{array} \right| = \int\frac{\cos t}{t^2}\cdot 3t^2\,dt = 3\int\cos t dt = 3\sin t + C =$$

$$= 3\sin\sqrt[3]{x} + C;$$

3) Домножимо чисельник і знаменник підінтегральної функції на x, а потім зробимо заміну змінної $\sqrt{1+x^2}=t$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{xdx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{1+x^2}=t,\quad x^2=t^2-1 \\ xdx=tdt \end{array} \right| = \int\frac{tdt}{\left(t^2-1\right)\cdot t} = \int\frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right| + C;$$

4) Щоб позбутися коренів різних степенів під знаком інтеграла, зробимо заміну змінної $x=t^6$

$$\int\frac{\sqrt{x}\ dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x=t^6,\quad t=\sqrt[6]{x} \\ \sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x}=t^2 \\ \quad dx=6t^5dt \end{array} \right| = \int\frac{t^3\cdot 6t^5\ dt}{t^2+t^3} = 6\int\frac{t^8}{t^2\left(1+t\right)} = 6\int\frac{t^6}{t+1} =$$

$$
= \left|
\begin{array}{l}
\begin{array}{r|l}
-\,t^6 & t+1 \\ \cline{2-2}
t^6 + t^5 & t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 \,; \\ \hline
\quad -\,-t^5 & \\
\quad -t^5 - t^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad -\,t^4 & \\
\qquad t^4 + t^3 & \\ \hline
\qquad\quad -\,-t^3 & \\
\qquad\quad -t^3 - t^2 & \\ \hline
\qquad\qquad -\,t^2 & \\
\qquad\qquad t^2 + t & \\ \hline
\qquad\qquad\quad -\,-t & \\
\qquad\qquad\quad -t - 1 & \\ \hline
\qquad\qquad\qquad 1 &
\end{array}
\qquad \frac{t^6}{t+1} = t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}
\end{array}
\right| =
$$

$$
= 6\int\left(t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C =
$$

$$
= t^6 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 6t + 6\ln|t+1| + C =
$$

$$
= x - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C;
$$

5) Зробимо заміну $\sqrt{e^x + 2} = t$

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 2}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{e^x + 2} = t \;\Rightarrow\; e^x + 2 = t^2 \;\Rightarrow\; e^x = t^2 - 2 \\ x = \ln\left|t^2 - 2\right|, \quad dx = \dfrac{2t\,dt}{t^2 - 2} \end{array} \right| = \int \frac{2t\,dt}{\left(t^2 - 2\right)t} = 2\int \frac{dt}{t^2 - 2} =
$$

$$
= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{e^x + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{e^x + 2} + \sqrt{2}}\right| + C.
$$

Метод інтегрування частинами

Приклади. Знайти інтеграли:

1) $\int x\cos x\,dx$; 2) $\int (x+2)\sin 2x\,dx$;

3) $\int \left(x^2 - x + 1\right)e^{-x}dx$; 4) $\int x^3 \ln x\,dx$; 5) $\int arctgx\,dx$; 6) $\int e^{2x}\cos 5x\,dx$.

<u>*Розв’язання.*</u>

1) Застосуємо формулу (1.5)

$$\int x\cos x\,dx == \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos x dx \\ du = dx, & v = \int \cos x dx = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

2) Застосуємо формулу (1.5)

$$\int (x+2)\sin 2x dx = \begin{vmatrix} u = x+2, & dv = \sin 2x dx \\ du = dx, & v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} = -(x+2)\cdot\frac{1}{2}\cos 2x -$$

$$-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = -\frac{1}{2}(x+2)\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(x+2)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

3) Формулу інтегрування частинами (1.5) будемо застосовувати двічі

$$\int\left(x^2 - x + 1\right)e^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x^2 - x + 1, & dv = e^{-x}dx \\ du = (2x-1)dx, & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{vmatrix} = -\left(x^2 - x + 1\right)e^{-x} +$$

$$+\int (2x-1)e^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = 2x-1, & dv = e^{-x}dx \\ du = 2dx, & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{vmatrix} = -\left(x^2 - x + 1\right)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} +$$

$$+2\int e^{-x}dx = -\left(x^2 - x + 1\right)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

4) $$\int x^3 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & dv = x^3 dx \\ du = \frac{1}{x}dx, & v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

5) В даному випадку многочлен $P(x) = 1$. Отже маємо

$$\int arctgx\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = arctgx, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = \int dx = x \end{array} \right| = x\,arctgx - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\,arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1} =$$

$$= x\,arctgx - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

6) Цей інтеграл належить до випадку, коли формулу інтегрування частинами (1.5) застосовують двічі. За функцію u можна взяти будь-яку із функцій, які є під знаком інтеграла.

Позначимо через u, наприклад, функцію e^{2x}. Одержимо

$$\int e^{2x}\cos 5x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}, & dv = \cos 5x dx \\ du = 2e^{2x}dx, & v = \int \cos 5x dx = \dfrac{1}{5}\sin 5x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}e^{2x}\sin 5x - \frac{2}{5}\int e^{2x}\sin 5x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}, & dv = \sin 5x dx \\ du = 2e^{2x}dx, & v = \int \sin 5x dx = -\dfrac{1}{5}\cos 5x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}e^{2x}\sin 5x - \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}e^{2x}\cos 5x + \frac{2}{5}\int e^{2x}\cos 5x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}e^{2x}\sin 5x + \frac{2}{25}e^{2x}\cos 5x - \frac{4}{25}\int e^{2x}\cos 5x\,dx.$$

Початковий і кінцевий інтеграли співпали. Розв’яжемо рівняння відносно невідомого інтеграла

$$\int e^{2x}\cos 5x dx = \frac{1}{5}e^{2x}\sin 5x + \frac{2}{25}e^{2x}\cos 5x - \frac{4}{25}\int e^{2x}\cos 5x dx.$$

$$\int e^{2x}\cos 5x dx + \frac{4}{25}\int e^{2x}\cos 5x dx = \frac{1}{5}e^{2x}\sin 5x + \frac{2}{25}e^{2x}\cos 5x,$$

$$\frac{29}{25}\int e^{2x}\cos 5x dx = \frac{1}{25}e^{2x}\left(5\sin 5x + 2\cos 5x\right),$$

$$\int e^{2x}\cos 5x dx = \frac{1}{25}\cdot\frac{25}{29}\cdot e^{2x}\left(5\sin 5x + 2\cos 5x\right) = \frac{1}{29}e^{2x}\left(5\sin 5x + 2\cos 5x\right) + C.$$

2.3. ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Приклад. Знайти

$$\int \frac{3x+4}{x^2+2x+10}dx.$$

Розв'язання.

Виділимо повний квадрат у знаменнику і зробимо заміну змінної. Одержимо

$$\int \frac{3x+4}{x^2+2x+10}dx = \left| \begin{matrix} x^2+2x+10= \\ =(x+1)^2+9 \end{matrix} \right| = \int \frac{3x+4}{(x+1)^2+9}dx = \left| \begin{matrix} x+1=t, \\ x=t-1, \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{3(t-1)+4}{t^2+9}dt =$$

$$= \int \frac{3t-3+4}{t^2+9}dt = 3\int \frac{tdt}{t^2+9} + \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2}\ln\left(t^2+9\right) + \frac{1}{3}arctg\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+10\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3} + C.$$

<u>Метод невизначених коефіцієнтів</u>.

<u>Приклади</u>. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{(x+3)(x-2)}$; 2) $\displaystyle\int \frac{\left(x^2+3\right)dx}{x(x+1)(x-3)}$; 3) $\displaystyle\int \frac{\left(x^2+2x\right)dx}{(x-2)^2(x+4)}$;

4) $\displaystyle\int \frac{\left(x^2+22\right)dx}{(x+4)\left(x^2+3\right)}$; 5) $\displaystyle\int \frac{\left(x^3+2x-4\right)dx}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)}$; 6) $\displaystyle\int \frac{5x^4-x^3+4x^2+8}{x^3-8}dx.$

Розв'язання.

1) Розкладемо підінтегральну функцію на найпростіші дроби

$$\frac{x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)}.$$

Прирівнюючи чисельники першого і останнього дробів, будемо мати

$$x+1 = A(x-2)+B(x+3).$$

Поклавши в цій рівності спочатку $x=-3$, а потім $x=2$, знаходимо невідомі A *і* В:

$$\begin{array}{l|l} x=-3 & \begin{cases} -2=-5A; \\ 3=5B. \end{cases} \\ x-2 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=\dfrac{2}{5}; \\ B=\dfrac{3}{5}. \end{array}$$

Тому
$$\frac{x+1}{(x+3)(x-2)}=\frac{\frac{2}{5}}{x+3}+\frac{\frac{3}{5}}{x-2},$$

$$\int\frac{(x+1)dx}{(x+3)(x-2)}=\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{3}{5}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{2}{5}\ln|x+3|+\frac{3}{5}\ln|x-2|+C.$$

2) Розкладемо підінтегральну функцію на найпростіші дроби

$$\frac{x^2+3}{x(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x^2+3=A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1).$$

Невідомі коефіцієнти A,B,C обчислимо поклавши в останній рівності

$$\begin{array}{l|l} x=0 & \begin{cases} 3=-3A, \\ 4=4B, \\ 12=12C, \end{cases} \\ x=-1 & \\ x=3 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=-1; \\ B=1; \\ C=1. \end{array}$$

Отже

$$\frac{x^2+3}{x(x+1)(x-3)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3},$$

$$\int\frac{(x^2+3)dx}{x(x+1)(x-3)}=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x-3}=-\ln|x|+\ln|x+1|+\ln|x-3|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x+1)(x-3)}{x}\right|+C.$$

3) Розкладемо підінтегральну функцію на найпростіші дроби

$$\frac{x^2+2x}{(x-2)^2(x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+4}=\frac{A(x-2)(x+4)+B(x+4)+C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+4)};$$

$$x^2+2x=A(x-2)(x+4)+B(x+4)+C(x-2)^2,$$

$$\begin{array}{l|l|l} x=2 & \begin{cases} 8=6B, \\ 8=36C, \\ 3=-5A+5B+C\Rightarrow 5A=-3+5\cdot\frac{4}{3}+\frac{2}{9}=\frac{35}{9} \end{cases} & B=\frac{4}{3}, \\ x=-4 & & C=\frac{2}{9}, \\ x=1 & & A=\frac{7}{9}. \end{array}$$

Таким чином $$\frac{x^2+2x}{(x-2)^2(x+4)}=\frac{\frac{7}{9}}{x-2}+\frac{\frac{4}{3}}{(x-2)^2}+\frac{\frac{2}{9}}{x+4},$$

$$\int\frac{\left(x^2+2x\right)dx}{(x-2)^2(x+4)}=\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+4}=\frac{7}{9}\ln|x-2|+\frac{4}{3}\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+$$

$$+\frac{2}{9}\ln|x+4|+C=\frac{7}{9}\ln|x-2|+\frac{2}{9}\ln|x+4|-\frac{4}{3(x-2)}+C.$$

4) Розкладемо підінтегральну функцію на найпростіші дроби

$$\frac{x^2+22}{(x+4)\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x+4}+\frac{Bx+C}{x^2+3}=\frac{A\left(x^2+3\right)+(Bx+C)(x+4)}{(x+4)\left(x^2+3\right)};$$

$$x^2+22=A\left(x^2+3\right)+(Bx+C)(x+4)=Ax^2+3A+Bx^2+4Bx+Cx+4C=$$
$$=x^2(A+B)+x(4B+C)+3A+4C.$$

В цій рівності прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, а також покладемо ще $x=-4$.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & \begin{cases} 1=A+B, \\ 0=4B+C, \\ 38=19A, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} B=-1, \\ C=4, \\ A=2. \end{array} \\ x & \\ x=-4 & \end{array}$$

Отже, $$\frac{x^2+22}{(x+4)\left(x^2+3\right)}=\frac{2}{x+4}+\frac{-x+4}{x^2+3}=\frac{2}{x+4}-\frac{x}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+3};$$

звідки отримаємо

$$\int\frac{\left(x^2+22\right)dx}{(x+4)\left(x^2+3\right)}=2\int\frac{dx}{x+4}-\int\frac{x\,dx}{x^2+3}+4\int\frac{dx}{x^2+3}=$$

$$= 2\ln|x+4| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) + \frac{4}{\sqrt{3}} arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

5) Розкладемо підінтегральну функцію на найпростіші дроби

$$\frac{x^3+2x-4}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{(Ax+B)\left(x^2+4\right)+(Cx+D)\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)};$$

Порівнюємо чисельники першого і останнього дробів

$$x^3+2x-4 = Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+2Cx+Dx^2+2D = x^3(A+C)+x^2(B+D)+$$
$$+x(4A+2C)+4B+2D;$$

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \left\{\begin{array}{l} 1 = A+C, \\ 0 = B+D, \\ 2 = 4A+2C, \\ -4 = 4B+2D, \end{array}\right. \\ x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array} \quad \begin{cases} A+C=1, \\ 2A+C=1; \end{cases} \begin{cases} A=0, \\ C=1, \end{cases} \quad \begin{cases} B+D=0, \\ 2B+D=-2; \end{cases} \begin{cases} D=2, \\ B=-2. \end{cases}$$

Отже,
$$\frac{x^3+2x-4}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)} = \frac{-2}{x^2+2} + \frac{x+2}{x^2+4},$$

$$\int\frac{\left(x^3+2x-4\right)dx}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+4\right)} = -2\int\frac{dx}{x^2+2} + \int\frac{xdx}{x^2+4} + 2\int\frac{dx}{x^2+4} == -\frac{2}{\sqrt{2}} arctg\frac{x}{\sqrt{2}} +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + \frac{2}{2} arctg\frac{x}{2} + C == arctg\frac{x}{2} - \sqrt{2} arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + C.$$

6) Дробово-раціональна функція є неправильним дробом. Спочатку необхідно виділити цілу частину підінтегральної функції

$$\begin{array}{r|l} -\,5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8 & x^3-8 \\ 5x^4 - 40x \quad\quad & \overline{5x-1} \\ \hline -\,-x^3 + 4x^2 + 40x + 8 & \\ -x^3 + 8 \quad\quad\quad\quad\quad & \\ \hline 4x^2 + 40x \quad\quad & \end{array};\qquad \frac{5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8}{x^3-8} = 5x - 1 + \frac{4x^2+40x}{x^3-8};$$

$$I=\int\frac{5x^4-x^3+4x^2+8}{x^3-8}dx=\int(5x-1)dx+\int\frac{4x^2+40x}{x^3-8}dx=5\int xdx-\int dx+$$

$$+\int\frac{4x^2+40x}{x^3-8}dx=5\cdot\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{4x^2+40x}{x^3-8}dx.$$

Знайдемо інтеграл $\int\frac{4x^2+40x}{x^3-8}dx.$

Розкладемо знаменник на множники: $x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right).$

Правильний дріб $\dfrac{4x^2+40x}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}$

розкладемо на найпростіші дроби і обчислимо невідомі коефіцієнти:

$$\frac{4x^2+40x}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}=\frac{A\left(x^2+2x+4\right)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 4x^2+40x=A\left(x^2+2x+4\right)+(Bx+C)(x-2)=Ax^2+2Ax+4A+Bx^2-2Bx+$$

$$+Cx-2C=x^2(A+B)+x(2A-2B+C)+4A-2C;$$

$$\begin{array}{c|l}
x^2 & \left\{\begin{array}{l}4=A+B,\\ 0=4A-2C,\\ 96=12A,\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}B=-4\\ C=16\\ A=8\,.\end{array}\\
x^0 & \\
x=2 &
\end{array}$$

Отже, $$\frac{4x^2+40x}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{8}{x-2}+\frac{-4x+16}{x^2+2x+4}.$$

$$\int\frac{\left(4x^2+40x\right)dx}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=8\int\frac{dx}{x-2}-4\int\frac{(x-4)dx}{x^2+2x+4}=8\ln|x-2|-4\int\frac{(x-4)dx}{x^2+2x+4}=$$

$$=8\ln|x-2|-4\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)-\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=8\ln|x-2|-2\ln\left(x^2+2x+4\right)+\frac{20}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C,$$

оскільки

$$\int\frac{(x-4)dx}{x^2+2x+4}=\left|\begin{matrix}x^2+2x+4=\\=(x+1)^2+3\end{matrix}\right|=\int\frac{(x-4)dx}{(x+1)^2+3}=\left|\begin{matrix}x+1=t\\x=t-1\\dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{(t-1-4)dt}{t^2+3}=$$

$$=\int\frac{(t-5)dt}{t^2+3}=\int\frac{tdt}{t^2+3}-5\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+3\right)-\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+c=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)-\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

Отже, остаточно маємо

$$I=\frac{5}{2}x^2-x+8\ln|x-2|-2\ln\left(x^2+2x+4\right)+\frac{20}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

2.4. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Приклади. Знайти інтеграли:

$$1)\int\sin 2x\cos 5xdx;\quad 2)\int\sin 2x\cos 3x\cos 4xdx;$$

$$3)\int\sin^5 x\cos^2 xdx;\quad 4)\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}dx;\quad 5)\int\sin^2 2xdx;\quad 6)\int\cos^4\frac{x}{2}dx;\quad 7)\int\frac{dx}{\sin x};$$

$$8)\int\frac{dx}{3+5\cos x};\quad 9)\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x};\quad 10)\int tg^3 xdx;\quad 11)\int\frac{dx}{tg^5 x};\quad 12)\int\frac{dx}{\sin^2 x-9\cos^2 x}.$$

Розв'язання.

1) Застосуємо першу із формул (1.6):

$$\sin 2x\cos 5x=\frac{1}{2}(\sin 7x+\sin(-3x))=\frac{1}{2}(\sin 7x-\sin 3x).$$

Одержимо

$$\int\sin 2x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x-\sin 3x)dx=\frac{1}{2}\int\sin 7xdx-\frac{1}{2}\int\sin 3xdx=$$

$$=-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

2) Для зведення підінтегральної функції до алгебраїчної суми функцій застосуємо формули (1.6) відповідно двічі:

$$\sin 2x\cos 3x\cos 4x=\sin 2x\cdot\frac{1}{2}(\cos 7x+\cos x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 7x+\frac{1}{2}\sin 2x\cos x=$$

$$=\frac{1}{4}(\sin 9x-\sin 5x)+\frac{1}{4}(\sin 3x+\sin x).$$

Одержимо

$$\int\sin 2x\cos 3x\cos 4xdx=\frac{1}{4}\int\sin 9xdx-\frac{1}{4}\int\sin 5xdx+\frac{1}{4}\int\sin 3xdx+\frac{1}{4}\int\sin xdx=$$

$$=-\frac{1}{36}\cos 9x+\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{1}{4}\cos x+C.$$

3) Для обчислення інтеграла застосуємо підстановку $\cos x=t,$ оскільки степінь $m=5$ є непарним

$$\int\sin^5 x\cos^2 x\,dx=\int\sin^4 x\cos^2 x\sin x\,dx=\int\left(\sin^2 x\right)^2\cos^2 x\sin x\,dx=$$

$$=\int\left(1-\cos^2 x\right)^2\cos^2 x\sin x\,dx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\end{matrix}\right|=-\int\left(1-t^2\right)^2\cdot t^2dt=$$

$$=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)\cdot t^2dt=-\int t^2dt+2\int t^4dt-\int t^6dt=-\frac{t^3}{3}+2\cdot\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{1}{7}\cos^7 x+C.$$

4) $$\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}dx=\int\cos^3 x\sin^{-\frac{2}{5}}xdx=\int\cos^2 x\sin^{-\frac{2}{5}}x\cos x\,dx=$$

$$=\int\left(1-\sin^2 x\right)\sin^{-\frac{2}{5}}x\cos xdx=\left|\begin{matrix}\sin x=t,\\ \cos xdx=dt\end{matrix}\right|=\int\left(1-t^2\right)t^{-\frac{2}{5}}dt=\int\left(t^{-\frac{2}{5}}-t^{\frac{8}{5}}\right)dt=\int t^{-\frac{2}{5}}dt-$$

$$-\int t^{\frac{8}{5}}dt=\frac{5\cdot t^{\frac{3}{5}}}{3}-\frac{t^{\frac{13}{5}}\cdot 5}{13}+C=\frac{5}{3}\sqrt[5]{\sin^3 x}-\frac{5}{13}\sqrt[5]{\sin^{13} x}+C.$$

5) $$\int\sin^2 2xdx=\left|\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}\right|=\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 4xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$$

6) $\int\cos^4\frac{x}{2}dx=\int\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^2dx=\int\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos x+\cos^2 x\right)dx=$

$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\int dx+$

$+\frac{1}{4}\cdot 2\int\cos xdx+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{16}\sin 2x+C.$

7) Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, & x=2arctgt, \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, & dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

8) $\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\left|\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, & x=2arctgt, \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, & dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$

$=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\frac{3+3t^2+5-5t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{8-2t^2}=-\int\frac{2dt}{2\left(t^2-4\right)}=-\int\frac{dt}{t^2-4}=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=$

$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{tg\frac{x}{2}+2}\right|+C.$

9) $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}=\left|\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, & x=2arctgt, & dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, & \end{matrix}\right|=$

$=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(2\cdot\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{4t-1+t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{t^2+4t-1}=2\int\frac{dt}{(t+2)^2-5}=$

$=\frac{2}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right|+C.$

10) Застосуємо підстановку виду $tgx = t$. Одержимо

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^4 dt}{1+t^2} = \int \frac{t^4 - 1 + 1}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

11) $$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^6 x} = \int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{ctg} x = t, x = \operatorname{arcctg} t \\ dx = -\dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = -\int \frac{t^6 dt}{1+t^2} = -\int \frac{t^6 - 1 + 1}{1+t^2} dt =$$

$$= -\int \left(t^4 - t^2 + 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arcctg} t + C = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + x + C.$$

12) Застосуємо підстановку $tg\,x = t$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 9\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} tgx = t, \quad x = arctgt, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\dfrac{t^2}{1+t^2} - \dfrac{9}{1+t^2} \right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{tgx - 3}{tgx + 3} \right| + C.$$

2.5. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Приклади. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + \sqrt[3]{2x+1}}$; 2) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x}} dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + 2}{x\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)} dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{2x + \sqrt{3x-2}}{3\sqrt[4]{3x-2} + \sqrt[4]{(3x-2)^3}} dx$; 5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3 - x^2}}{x^2} dx$;

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\left(2 + x^2\right)^3}}$; 7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 9}}$; 8) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x} dx$.

Розв'язання.

1) Застосуємо підстановку $2x+1=t^3$, тоді

$$\int \frac{dx}{5+\sqrt[3]{2x+1}}=\left|\begin{array}{ll}\sqrt[3]{2x+1}=t, & 2x=t^3-1, \\ 2x+1=t^3, & x=\frac{1}{2}\left(t^3-1\right),\end{array}\ dx=\frac{3}{2}t^2dt\right|=\int\frac{\frac{3}{2}t^2dt}{5+t}=\frac{3}{2}\int\frac{t^2}{t+5}dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int\left(t-5+\frac{25}{t+5}\right)dt=\frac{3}{2}\int tdt-\frac{15}{2}\int dt+\frac{75}{2}\int\frac{dt}{t+5}=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{15}{2}t+\frac{75}{2}\ln|t+5|+C=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\frac{15}{2}\sqrt[3]{2x+1}+\frac{75}{2}\ln\left|\sqrt[3]{2x+1}+5\right|+C.$$

2) Застосуємо підстановку $x=t^2$

$$\int\frac{1+\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{c}\sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int\frac{(1+t)2t}{t^2+2t}dt=2\int\frac{(1+t)t}{t(t+2)}dt=2\int\frac{t+1}{t+2}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}-\dfrac{t+1\ \big|\ t+2}{t+2\ \big|\ 1} \\ \quad -1\end{array};\quad \frac{t+1}{t+2}=1+\frac{-1}{t+2}\right|=2\int\left(1-\frac{1}{t+2}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t+2}=$$

$$=2t-2\ln|t+2|+C=2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+2\right|+C.$$

3) Враховуючи, що $\sqrt{x}=x^{1/2}$, $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ і спільним знаменником дробів $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}$ є число $N=6$, то підстановка буде $x=t^6$

$$\int\frac{\sqrt{x}+2}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx=\left|\begin{array}{lll}x=t^6, & dx=6t^5dt & \\ \sqrt{x}=t^3, & \sqrt[3]{x}=t^2, & t=\sqrt[6]{x}\end{array}\right|=\int\frac{\left(t^3+2\right)6t^5}{t^6\left(t^2+1\right)}dt=6\int\frac{t^3+2}{t\left(t^2+1\right)}dt=$$

$$=6\int\frac{t^3+2}{t^3+t}dt=\left|\begin{array}{l}-\dfrac{t^3+2\ \big|\ t^3+t}{t^3+t\ \big|\ 1} \\ \quad -t+2\end{array};\quad\frac{t^3+2}{t^3+t}=1+\frac{-t+2}{t^3+t}\right|=6\int\left(1-\frac{t-2}{t\left(t^2+1\right)}\right)dt=$$

$$=6\int dt-6\int\frac{t-2}{t\left(t^2+1\right)}dt=I.$$

Обчислимо інтеграл $\int \frac{t-2}{t\left(t^2+1\right)}dt,$ розклавши підінтегральну функцію на найпростіші дроби. Одержимо

$$\frac{t-2}{t\left(t^2+1\right)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A\left(t^2+1\right)+\left(Bt+C\right)t}{t\left(t^2+1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t-2 = A\left(t^2+1\right)+\left(Bt+C\right)t = At^2 + A + Bt^2 + Ct = t^2\left(A+B\right)+Ct+A;$$

$$\begin{array}{c|l} t^2 & \\ t & \\ t^0 & \end{array} \begin{cases} 0 = A+B, & \qquad B=2, \\ 1 = C, \qquad \Rightarrow & \qquad C=1, \\ -2 = A, & \qquad A=-2. \end{cases}$$

Тобто $\quad \frac{t-2}{t\left(t^2+1\right)} = -\frac{2}{t} + \frac{2t+1}{t^2+1};$

$$\int \frac{t-2}{t\left(t^2+1\right)}dt = -2\int\frac{dt}{t} + \int\frac{2tdt}{t^2+1} + \int\frac{dt}{t^2+1} = -2\ln|t| + \ln\left(t^2+1\right) + arctg\, t + C,$$

$$I = 6t - 6\left(-2\ln|t| + \ln\left(t^2+1\right) + arctg\, t\right) + C = 6\sqrt[6]{x} + 12\ln\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[3]{x}+1\right) -$$

$$-6arctg\sqrt[6]{x} + C.$$

4) Врахувавши перетворення $\sqrt{3x-2} = \left(3x-2\right)^{1/2}, \quad \sqrt[4]{3x-2} = \left(3x-2\right)^{1/4},$ $\sqrt[4]{\left(3x-2\right)^3} = \left(3x-2\right)^{3/4}$ і той факт ,що спільним знаменником показників степенів $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ є число $N=4,$ дістанемо підстановку $3x-2=t^4$

$$\int \frac{\left(2x+\sqrt{3x-2}\right)dx}{3\sqrt[4]{3x-2}+\sqrt[4]{\left(3x-2\right)^3}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt[4]{3x-2}=t, & \sqrt{3x-2}=t^2 \\ x=\frac{1}{3}\left(t^4+2\right), & dx=\frac{4}{3}t^3dt \end{array} \right| = \int \frac{\left(\frac{2}{3}\left(t^4+2\right)+t^2\right)\frac{4}{3}t^3}{3t+t^3}dt =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{\left(\frac{2}{3}\left(t^4+2\right)+t^2\right)t^3}{t\left(t^2+3\right)}dt = \frac{4}{9}\int\frac{\left(2t^4+4+3t^2\right)t^2}{t^2+3}dt = \frac{4}{9}\int\frac{2t^6+3t^4+4t^2}{t^2+3}dt =$$

$$=\left|\begin{array}{l} \begin{array}{r|l} -\;2t^6+3t^4+4t^2 & t^2+3 \\ 2t^6+6t^4 & \overline{2t^4-3t^2+13} \\ \hline -\;-3t^4+4t^2 & \\ -3t^4-9t^2 & \\ \hline -\;13t^2 & \\ 13t^2+39 & \\ \hline -39 & \end{array}; \qquad \dfrac{2t^6+3t^4+4t^2}{t^2+3}=2t^4-3t^2+13+\dfrac{-39}{t^2+3} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{9}\int\left(2t^4-3t^2+13-\frac{39}{t^2+3}\right)dt=\frac{8}{9}\int t^4dt-\frac{4}{3}\int t^2dt+\frac{52}{9}\int dt-\frac{4\cdot 39}{9}\int\frac{dt}{t^2+3}=$$

$$=\frac{8}{9}\cdot\frac{t^5}{5}-\frac{4}{3}\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{52}{9}t-\frac{52}{3\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{8}{45}\sqrt[4]{(3x-2)^5}-\frac{4}{9}\sqrt[4]{(3x-2)^3}+$$

$$+\frac{52}{9}\sqrt[4]{3x-2}-\frac{52}{3\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt[4]{3x-2}}{\sqrt{3}}+C.$$

5) Для спрощення виразу $\sqrt{3-x^2}$ застосуємо тригонометричну підстановку $x=\sqrt{3}\sin t.$

$$\int\frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2}dx=\left|\begin{array}{l} x=\sqrt{3}\sin t,\ \ \sin t=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, \\ dx=\sqrt{3}\cos t dt,\ \ t=arc\sin\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{3-3\sin^2 t}}{3\sin^2 t}\cdot\sqrt{3}\cos t dt=$$

$$=\int\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 t}}{3\sin^2 t}\sqrt{3}\cos t dt=\int\frac{\sqrt{\cos^2 t}}{\sin^2 t}\cos t dt=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int dt=-ctgt-t+C=C-\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}-ctg\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right).$$

6) Для спрощення виразу $\sqrt{2+x^2}$ застосуємо тригонометричну підстановку $x=\sqrt{2}tgt.$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(2+x^2\right)^3}}=\left|\begin{array}{l}x=\sqrt{2}tgt,\quad tgt=\dfrac{x}{\sqrt{2}},\\ dx=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}dt,\ \ t=arctg\dfrac{x}{\sqrt{2}}\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{2}dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(2+2tg^2t\right)^3}}=$$

$$=\int\frac{\sqrt{2}dt}{\cos^2 t\left(\sqrt{2}\right)^3\sqrt{\left(1+tg^2t\right)^3}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^3}}=\frac{1}{2}\int\frac{\cos^3 t}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int\cos t dt=$$

$$=\frac{1}{2}\sin t+C=\frac{1}{2}\sin\left(arctg\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

7) Для спрощення виразу $\sqrt{x^2-9}$, застосуємо тригонометричну підстановку $x=\dfrac{3}{\cos t}$.

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}=\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{\cos t},\qquad \cos t=\dfrac{3}{x},\\ dx=\dfrac{3\sin t}{\cos^2 t}dt,\ \ t=arc\cos\dfrac{3}{x}\end{array}\right|=\int\frac{3\sin t dt}{\cos^2 t\cdot\dfrac{3^3}{\cos^3 t}\sqrt{\dfrac{9}{\cos^2 t}-9}}=$$

$$=\frac{1}{27}\int\frac{\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}-1}}=\frac{1}{27}\int\frac{\sin t\cos t\,dt}{tgt}=\frac{1}{27}\int\cos^2 tdt=\frac{1}{27}\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{54}\int\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{1}{54}\int dt+\frac{1}{54}\int\cos 2tdt=\frac{1}{54}t+\frac{1}{108}\sin 2t+C=$$

$$=\frac{1}{54}\arccos\frac{3}{x}+\frac{1}{108}\sin\left(2\arccos\frac{3}{x}\right)+C.$$

§3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

3.1. ПЕРВІСНА. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ВЛАСТИВОСТІ

В задачах **1 – 25**, користуючись таблицею інтегралів і основними правилами інтегрування, обчислити інтеграли.

1. $\int \sqrt[5]{x^3}dx.$ 2. $\int \frac{dx}{x^5}.$ 3. $\int 3^x \cdot e^x dx.$ 4. $\int \left(1-\frac{5}{2}x^{-1/2}\right)dx.$

5. $\int \left(1-7\sqrt{x}+x\sqrt[5]{x}\right)dx.$ 6. $\left(x^8-5x^4+3x^2\right)dx.$ 7. $\int x^2\left(x-\frac{2}{x}\right)dx.$

8. $\int (x+2)(x-1)\,dx.$ 9. $\int \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}+2\right)dx.$ 10. $\int \frac{2-5x^4+3x}{x^2}dx.$

11. $\int \frac{2\sqrt{x}+x^2e^x-5x^3}{x^2}dx.$ 12. $\int \frac{3\cdot 4^x+2\cdot 2^x}{4^x}dx.$ 13. $\int \frac{3\cos^2 x-4\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx.$

14. $\int (2tgx-5\cos x+\sin x)\,dx.$ 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

17. $\int \frac{dx}{x^2+5}.$ 18. $\int \frac{dx}{x^2-10}.$ 19. $\int \frac{\cos 2x}{2\cos^2 x}dx.$

20. $\int (1-3ctgx+4\cos x)\,dx.$ 21. $\int \frac{3-\cos 2x}{6\cos^2 x}dx.$ 22. $\int \frac{2-\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3-x^2}}dx.$

23. $\int \frac{\sqrt{x^2+10}-5}{x^2+10}dx.$ 24. $\int \frac{2+x^2}{x^4-4}dx.$ 25. $\int \sqrt{\frac{5+x^2}{x^4-25}}dx.$

В задачах **26-86** знайти інтеграли, користуючись властивістю про інваріантність формул інтегрування.

26. $\int (10x-5)^{11}dx.$ 27. $\int \sqrt{3x-4}dx.$ 28. $\int \frac{dx}{(4x-9)^6}.$ 29. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3x+10}}.$

30. $\int x\sqrt[9]{4x^2+5}dx.$ 31. $\int \frac{x^6dx}{\sqrt[5]{8-x^7}}.$ 32. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{\left(5-x^4\right)^5}}.$ 33. $\int \frac{dx}{7-4x}.$

34. $\int \frac{xdx}{7+4x^2}.$ 35. $\int \frac{x^2dx}{x^3-11}.$ 36. $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx.$ 37. $\int \frac{\left(3x^2-2\right)dx}{x^3-2x+8}.$

38. $\int \frac{x^5}{10-x^6}dx.$ 39. $\int \frac{x^3}{1-5x^4}dx.$ 40. $\int 2^{x+3}dx.$ 41. $\int 5^{-x+7}dx.$

42. $\int x5^{x^2}dx.$ 43. $\int x^2 7^{-x^3}dx.$ 44. $\int e^{-x}dx.$ 45. $\int e^{2x+5}dx.$

46. $\int e^{-x^4}x^3dx.$ 47. $\int e^{4x-5}dx.$ 48. $\int 6^{3x-1}dx.$ 49. $\int \cos 5x dx.$

50. $\int \sin(2x-1)\,dx.$ 51. $\int \cos\frac{x}{2}dx.$ 52. $\int \sin\left(1-\frac{x}{3}\right)dx.$ 53. $\int tg(3x-5)\,dx.$

54. $\int ctg(4x+1)\,dx.$ 55. $\int ctg\frac{x}{5}dx.$ 56. $\int \frac{dx}{1+9x^2}.$ 57. $\int \frac{dx}{10x^2+3}.$

58. $\int \frac{dx}{10x^2-9}.$ 59. $\int \frac{dx}{x^2-25}.$ 60. $\int \frac{xdx}{x^4+5}.$ 61. $\int \frac{x^2dx}{x^6+7}.$

62. $\int \frac{xdx}{x^4-2}.$ 63. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}.$ 64. $\int \frac{x^3dx}{x^8-6}.$ 65. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

66. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$ 67. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}.$ 68. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$ 69. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(2x+3)^2}}.$

70. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-3)^2+11}}.$ 71. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-10}}.$ 72. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}.$ 73. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2}}.$

74. $\int \frac{4^x dx}{7+4^x}.$ 75. $\int \frac{2^x dx}{4^x+3}.$ 76. $\int \frac{e^{3x}-2e^{2x}-1}{e^x}dx.$ 77. $\int \frac{3x+2}{x^2+8}dx.$

78. $\int \frac{4x-1}{2x^2+1}.$ 79. $\int \frac{x-3}{4x^2-1}dx.$ 80. $\int \frac{2-x}{x^2-10}dx.$ 81. $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2}}dx.$

82. $\int \frac{3-x}{\sqrt{2-x^2}}dx.$ 83. $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2-7}}dx.$ 84. $\int \frac{x-1}{\sqrt{7-x^2}}dx.$

85. $\int \frac{5x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ 86. $\int \frac{2\arccos x-3x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

В задачах **87 – 107** обчислити інтеграли, використовуючи метод виділення цілої частини дробової функції та метод виділення повного квадрату

87. $\int \frac{x}{x+5}dx.$ 88. $\int \frac{2x-1}{x+3}dx.$ 89. $\int \frac{x^2+2}{x-4}dx.$ 90. $\int \frac{x^3-4}{x^2+1}dx.$

91. $\int \frac{x^4+3}{x^2+2}dx.$ 92. $\int \frac{x^2+1}{x^2-5}dx.$ 93. $\int \frac{x^2-3}{x^2+6}dx.$ 94. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}.$

95. $\int \frac{dx}{x^2-3x+5}.$ 96. $\int \frac{dx}{x^2-4x+1}.$ 97. $\int \frac{dx}{x^2+2x-5}.$ 98. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-1}}.$

99. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x-x^2}}.$ 100. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}.$ 101. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9x+2}}.$

102. $\int \frac{dx}{4x^2+4x-3}.$ 103. $\int \frac{dx}{2x^2+x-2}.$ 104. $\int \frac{dx}{3x^2+x-3}.$

105. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}}.$ 106. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x-9x^2}}.$ 107. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-4x^2}}.$

3.2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Метод заміни змінної

В задачах **108 – 131** знайти інтеграли, застосовуючи метод заміни змінної.

108. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$ 109. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx.$ 110. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}.$

111. $\int \frac{2x+1}{x\sqrt{x+1}}dx.$ 112. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}.$ 113. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+4}.$

114. $\int \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x+3}}.$ 115. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+4}.$ 116. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}.$

117. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-5\right)}.$ 118. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{5+\sqrt[4]{x}}.$ 119. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}.$

120. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}.$ 121. $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}dx.$ 122. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-3}}.$

123. $\int \sqrt{e^x-4}\,dx.$ 124. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x-1}}.$ 125. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4x-1}}.$

126. $\int \frac{dx}{e^x+3}.$ 127. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+2)}.$ 128. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-4)}.$

129. $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x+2}}.$ 130. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}(x+3)}.$ 131. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)}.$

Метод інтегрування частинами

В задачах **132 – 163** знайти інтеграли, застосовуючи метод інтегрування частинами.

132. $\int x\sin x dx.$ 133. $\int (x-4)\cos 3x dx.$ 134. $\int (2x+3)\sin\frac{x}{2}dx.$

135. $\int xe^x dx.$ 136. $\int (3x+2)e^{-3x}dx.$ 137. $\int x^3e^{2x}dx.$

138. $\int x2^x dx.$ 139. $\int (4x+5)3^x dx.$ 140. $\int \left(x^2+7\right)7^{-x}dx.$

141. $\int x10^x dx.$ 142. $\int x^2e^{4x}dx.$ 143. $\int x^2\cos x dx.$

144. $\int (1-2x)\cos 3x dx.$ 145. $\int \ln x dx.$ 146. $\int \ln^2 x dx.$

147. $\int \left(x^3-4x\right)\ln x dx.$ 148. $\int \ln\left(x^2+2\right)dx.$ 149. $\int \ln(3x+1)dx.$

150. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx.$ 151. $\int \frac{x}{\cos^2 3x}dx.$ 152. $\int \frac{xdx}{\sin^2 2x}.$

153. $\int \frac{xdx}{\sin^2 5x}.$ 154. $\int x\,arctg x dx.$ 155. $\int arcctg x dx.$

156. $\int arc\sin x dx.$ 157. $\int \frac{arc\cos x dx}{x^2}.$ 158. $\int e^x\cos 2x dx.$

159. $\int e^{3x}\sin\frac{x}{3}dx.$ 160. $\int 4^x\sin x dx.$ 161. $\int \cos\sqrt{x}dx.$

162. $\int \sin\sqrt{x}dx.$ 163. $\int \sqrt{2+x^2}dx.$

В задачах **164 – 220** знайти інтеграли, застосовуючи правила та методи інтегрування

164. $\int \frac{x^2+3}{x^2-2}dx.$ 165. $\int \frac{xdx}{2x+1}.$ 166. $\int \frac{dx}{4x^2-7}.$

167. $\int \frac{dx}{4x^2+5}.$ 168. $\int \frac{dx}{2x^2-3}.$ 169. $\int \frac{dx}{4-5x^2}.$

170. $\int (x+1)\sqrt{x}dx.$171. $\int x\sqrt{2x+5}dx.$ 172. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}.$

173. $\int x^2\sqrt{3-x}dx.$ 174. $\int x^2\sqrt{2-3x}dx.$ 175. $\int \left(x^2+2x\right)\sqrt[3]{x}dx.$

176. $\int \left(1+e^{2x}\right)e^{2x}dx.$ 177. $\int \left(2+e^{3x}\right)e^{-x}dx.$ 178. $\int e^x\sqrt{2-e^x}dx.$

179. $\int \left(1+2^x\right)\cdot 2^x dx.$ 180.$\int 10^x\left(2-3^x\right)dx.$ 181. $\int 8^x\left(4+2^x\right)dx.$

182. $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$ 183. $\int \frac{\cos\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx.$ 184. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

185. $\int xtgx^2dx.$ 186. $\int xctgx^2dx.$ 187. $\int x\cos x^2dx.$

188. $\int x\sin x^2dx.$ 189. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}.$ 190. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x-2}}.$

191. $\int \frac{xdx}{(x-2)^2}.$ 192. $\int \frac{xdx}{(x+2)^3}.$ 193. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+3x}}.$

194. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{9x^2-4}}dx.$ 195. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+5}}dx.$ 196. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4-3x^2}}dx.$

197. $\int \frac{dx}{4x^2+2x-3}.$ 198. $\int \frac{dx}{2x^2+4x+5}.$ 199. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}.$

200. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+2}.$ 201. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3+\sqrt[3]{x}}.$ 202. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}.$

203. $\int x^2 3^x dx.$ 204. $\int x^2\cos 2xdx.$ 205. $\int x^2\sin 4xdx.$

206. $\int \left(x^3+2x\right)e^x dx.$ 207. $\int x^2e^{-x}dx.$ 208. $\int xarctgxdx.$

209. $\int x^2arctgxdx.$ 210. $\int x(arcctgx)^2\,dx.$ 211. $\int \left(x^4-2x^3\right)\ln xdx.$

212. $\int \ln\left(x^2-4\right)dx.$ 213. $\int \ln\left(x^2+3\right)dx.$ 214. $\int x^3\ln(x+2)dx.$

215. $\int \frac{x arctg 2x}{\sqrt{1+4x^2}}dx.$ 216. $\int \frac{x arcctg 3x}{\sqrt{1+9x^2}}dx.$ 217. $\int \frac{arc\cos x}{\sqrt{x+1}}dx.$

218. $\int \frac{arc\sin x}{\sqrt{1-x}}dx.$ 219. $\int arctg\sqrt{x}dx.$ 220. $\int arc\cos\sqrt{x}dx.$

3.3. ІНТЕГУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

В задачах **221 – 238** знайти інтеграли від дробово-раціональних функцій.

221. $\int \frac{2x+12}{(x+2)(x-6)}dx.$ 222. $\int \frac{7x+8}{(x-1)(2x+3)}dx.$ 223. $\int \frac{x^2-12}{x(x+4)(x-3)}dx.$

224. $\int \frac{x^2+5x-10}{x^2-2x-3}dx.$ 225. $\int \frac{x^4-4x^3+5x+4}{x^3-4x}dx.$ 226. $\int \frac{3x-4}{x^3-2x^2}dx.$

227. $\int \frac{x^2+4x}{(x+1)^2(x-3)}dx.$ 228. $\int \frac{2x^2-5x+2}{x^3-2x^2+2x}dx.$ 229. $\int \frac{x^3-8}{x^3+4x}dx.$

230. $\int \frac{6x^2+5x+4}{x^4+2x^2}dx.$ 231. $\int \frac{3x^2-2x+1}{\left(x^2+5\right)(x-2)}dx.$ 232. $\int \frac{x^2+2x-6}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+6\right)}dx.$

233. $\int \frac{(9+x)dx}{x^4+x^2-2}.$ 234. $\int \frac{x^3+2}{x^4+6x^2+8}dx.$ 235. $\int \frac{3x+8}{x^3+x^2+4x+4}dx.$

236. $\int \frac{x^5dx}{x^3+1}.$ 237. $\int \frac{x^6dx}{x^4-16}.$ 238. $\int \frac{3x^2+2x-9}{x^3-9x}dx.$

3.4. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В задачах **239 – 306** знайти інтеграли від тригонометричних функцій.

239. $\int \cos 3x\cos 5x dx.$ 240. $\int \cos 3x\cos 4x\cos 6x dx.$ 241. $\int \sin 4x\cos 2x dx.$

242. $\int \sin 3x\sin 5x\sin 2x dx.$ 243. $\int \sin 3x\sin 7x dx.$ 244. $\int \sin 2x\cos 3x\cos 4x dx.$

245. $\int \cos^2 3x dx.$ 246. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx.$ 247. $\int \cos^4\frac{x}{4}dx.$

248. $\int \sin^4 3x dx.$ 249. $\int \left(tg^2x+3tg^5x\right)dx.$ 250. $\int tg^5x dx.$

251. $\int ctg^6 x dx.$ 252. $\int \cos^3 2x dx.$ 253. $\int \sin^5 2x dx.$

254. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}.$ 255. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$ 256. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^7 x}} dx.$

257. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx.$ 258. $\int (2+\cos x)^2 dx.$ 259. $\int (4-\sin 2x)^2 dx.$

260. $\int \frac{dx}{\cos x}.$ 261. $\int \frac{dx}{5+\sin x}.$ 262. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}.$

263. $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 4}.$ 264. $\int \frac{dx}{4-3\sin x}.$ 265. $\int \frac{dx}{5-2\cos x}.$

266. $\int \frac{dx}{\sin x + 4\cos x - 1}.$ 267. $\int \frac{dx}{3+\cos x - 2\sin x}.$ 268. $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x}.$

269. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x - 5}.$ 270. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x - 1}.$ 271. $\int \frac{dx}{4+3\cos^2 x}.$

272. $\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x}.$ 273. $\int \frac{dx}{2+tgx}.$ 274. $\int \frac{ctgx dx}{3-ctgx}.$

275. $\int \frac{dx}{1+2tgx+ctgx}.$ 276. $\int \frac{tgx dx}{tgx+3}.$ 277. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + tg^2 x}.$

278. $\int \frac{dx}{\sin^4 x - 4}.$ 279. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}.$ 280. $\int \frac{\sin x}{3+\sin x} dx.$

281. $\int \frac{\cos x}{2+\cos x} dx.$ 282. $\int \sin\frac{1}{2}x \cos\frac{3}{2}x dx.$ 283. $\int \cos\frac{1}{2}x \cos\frac{3}{2}x dx.$

284. $\int \frac{4+tgx}{\sin 2x} dx.$ 285. $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}} dx.$ 286. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx.$

287. $\int \sin^6 x dx.$ 288. $\int \cos^6 x dx.$ 289. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

290. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx.$ 291. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$ 292. $\int \cos^7 x dx.$

293. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$ 294. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ 295. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$

296. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}.$ 297. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}.$ 298. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin x}.$

299. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$ 300. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$ 301. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$

302. $\int \frac{dx}{\sin 3x \cdot \cos 3x}$. 303. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. 304. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x \cos^2 5x}$.

305. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$. 306. $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}}$.

3.5. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

В задачах **307 – 343** знайти інтеграли від ірраціональних функцій.

307. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+5}dx$. 308. $\int \frac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$. 309. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+2}{3\sqrt[6]{x}+\sqrt[4]{x}}dx$.

310. $\int \frac{\sqrt[7]{x}+3\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+2\sqrt[14]{x^{15}}}dx$. 311. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$. 312. $\int \frac{xdx}{4+\sqrt{2x+1}}$.

313. $\int x\sqrt{3-x}\,dx$. 314. $\int x\sqrt{x+2}dx$. 315. $\int \frac{\sqrt{2x+5}}{x}dx$.

316. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}dx$. 317. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{x}-27}dx$. 318. $\int \frac{x^2dx}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$.

319. $\int \frac{dx}{\left(9-\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$. 320. $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+3\right)dx}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}\right)\sqrt[6]{x^5}}$. 321. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}\right)\sqrt[6]{(x+2)}}$.

322. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$. 323. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}}$. 324. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}$.

325. $\int \frac{x+\sqrt{4+x}}{\sqrt[3]{4+x}}dx$. 326. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$. 327. $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

328. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{4+x^2}}$. 329. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$. 330. $\int \frac{dx}{x\sqrt{7+x^2}}$.

331. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}$. 332. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}dx$. 333. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+6}}$.

334. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-5}}$. 335. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^2-2\right)^3}}$. 336. $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^4}dx$.

337. $\int \frac{\sqrt{\left(x^2+2\right)^3}}{x^6}dx.$ 338. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^5}}.$ 339. $\int x^3\sqrt{x^2-7}dx.$

340. $\int x^2\sqrt{5-x^2}dx.$ 341. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(3+x^2\right)^3}}.$ 342. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx.$ 343. $\int \frac{\sqrt{x^2+6}}{x^3}dx.$

<u>Відповіді</u>

1. $\frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8}+C.$ **2.** $-\frac{1}{4x^4}+C.$ **3.** $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C.$ **4.** $x-5\sqrt{x}+C.$

5. $x-\frac{2x\sqrt{x}}{3}+\frac{5x^2\sqrt[5]{x}}{11}+C.$ **6.** $\frac{x^9}{9}-x^5+x^3+C.$ **7.** $\frac{x^4}{4}-x^2+C.$

8. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+C.$ **9.** $\frac{x^2}{2}-3x+\frac{4x\sqrt{x}}{3}+C.$ **10.** $-\frac{2}{x}-\frac{5x^3}{3}+3\ln|x|+C.$

11. $-\frac{4}{\sqrt{x}}+e^x-5x+C.$ **12.** $3x-\frac{1}{2^{x-1}\ln 2}+C.$ **13.** $-3ctgx-4tgx+C.$

14. $\ln\frac{1}{\cos^2 x}-5\sin x-\cos x+C.$ **15.** $arc\sin\frac{x}{2}+C.$ **16.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C.$

17. $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$ **18.** $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|+C.$ **19.** $x-\frac{1}{2}tgx+C.$

20. $x-3\ln|\sin x|-4\sin x+C.$ **21.** $\frac{2}{3}tgx-\frac{1}{3}x+C.$ **22.** $2arc\sin\frac{x}{\sqrt{3}}-x+C.$

23. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+10}\right|-\frac{5}{\sqrt{10}}arctg\frac{x}{\sqrt{10}}+C.$ **24.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C.$

25. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right|+C.$ **26.** $\frac{1}{120}(10x-5)^{12}+C.$ **27.** $\frac{2}{9}\sqrt{(3x-4)^3}+C.$

28. $-\frac{1}{20(4x-9)^5}+C.$ **29.** $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(3x+10)^4}+C.$ **30.** $\frac{9}{80}\sqrt[9]{\left(4x^2+5\right)^{10}}+C.$

31. $-\frac{5}{28}\sqrt[5]{\left(8-x^7\right)^4}+C.$ **32.** $-\frac{1}{10\left(3+x^5\right)^2}+C.$ **33.** $-\frac{1}{4}\ln|7-4x|+C.$

34. $\frac{1}{8}\ln\left|7+4x^2\right|+C.$ **35.** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3-11\right|+C.$ **36.** $\ln\left|e^x+2\right|+C.$

37. $\ln\left|x^3-2x+8\right|+C.$ **38.** $-\frac{1}{6}\ln\left|10-x^6\right|+C.$ **39.** $-\frac{1}{20}\ln\left|1-5x^4\right|+C.$

40. $\frac{8}{\ln 2}2^x+C.$ **41.** $-\frac{1}{\ln 5}5^{-x+7}+C.$ **42.** $\frac{1}{2\ln 5}5^{x^2}+C.$ **43.** $-\frac{1}{3\ln 7}7^{-x^3}+C.$

44. $-e^{-x}+C.$ **45.** $\frac{1}{2}e^{2x+5}+C.$ **46.** $-\frac{1}{4}e^{-x^4}+C.$ **47.** $\frac{1}{4}e^{4x-5}+C.$

48. $\frac{1}{3\ln 6}6^{3x-1}+C.$ **49.** $\frac{1}{5}\sin 5x+C.$ **50.** $-\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C.$ **51.** $2\sin\frac{x}{2}+C.$

52. $3\cos\left(1-\frac{x}{3}\right)+C.$ **53.** $-\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x-5)\right|+C.$ **54.** $\frac{1}{4}\ln\left|\sin(4x+1)\right|+C.$

55. $5\ln\left|\sin\frac{x}{5}\right|+C.$ **56.** $\frac{1}{3}arctg3x+C.$ **57.** $\frac{1}{\sqrt{30}}arctg\frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{3}}+C.$

58. $\frac{1}{6\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\sqrt{10}x-3}{\sqrt{10}x+3}\right|+C.$ **59.** $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C.$ **60.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{x^2}{\sqrt{5}}+C.$

61. $\frac{1}{3\sqrt{7}}arctg\frac{x^3}{\sqrt{7}}+C.$ **62.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}}\right|+C.$ **63.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+2}\right|+C.$

64. $\frac{1}{8\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{6}}{x^4+\sqrt{6}}\right|+C.$ **65.** $arc\sin\frac{x}{2}+C.$ **66.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C.$

67. $\frac{1}{2}arc\sin\frac{2x}{\sqrt{5}}+C.$ **68.** $\frac{1}{2}arc\sin\frac{2x}{3}+C.$ **69.** $\frac{1}{2}arc\sin\frac{2x+3}{2}+C.$

70. $\frac{1}{2}\ln\left|2x-3+\sqrt{(2x-3)^2+11}\right|+C.$ **71.** $\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-10}\right|+C.$

72. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+4}\right|+C.$ **73.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2-2}\right|+C.$

74. $\frac{\ln\left|7+4^x\right|}{\ln 4}+C.$ **75.** $\frac{1}{\sqrt{3}\ln 2}arctg\frac{2^x}{\sqrt{3}}+C.$ **76.** $\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+\frac{1}{e^x}+C.$

77. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+8\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{2\sqrt{2}}+C.$ **78.** $\ln\left|2x^2+1\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}x+C.$

79. $\frac{1}{8}\ln\left|4x^2-1\right|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+C.$ **80.** $\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-10\right|+C.$

81. $\sqrt{x^2+2}+5\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C.$ **82.** $3arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2-x^2}+C.$

83. $\sqrt{x^2-7}+4\ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right|+C.$ **84.** $-\sqrt{7-x^2}-arc\sin\frac{x}{\sqrt{7}}+C.$

85. $-5\sqrt{1-x^2}-\frac{arc\sin^2 x}{2}+C.$ **86.** $-arc\cos^2 x+3\sqrt{1-x^2}+C.$

87. $x-5\ln|x+5|+C.$ **88.** $2x-7\ln|x+3|+C.$ **89.** $\frac{x^2}{2}+4x+18\ln|x-4|+C.$

90. $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+4arctgx+C.$ **91.** $\frac{x^3}{3}-2x+\frac{7}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

92. $x+\frac{3}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C.$ **93.** $x-\frac{9}{\sqrt{6}}arctg\frac{x}{\sqrt{6}}+C.$ **94.** $\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$

95. $\frac{2}{\sqrt{11}}arctg\frac{2x-3}{\sqrt{11}}+C.$ **96.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|+C.$ **97.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{6}}{x+1+\sqrt{6}}\right|+C.$

98. $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2-4x-1}\right|+C.$ **99.** $arc\sin\frac{2x+1}{\sqrt{17}}+C.$ **100.** $arc\sin\frac{x+1}{\sqrt{6}}+C.$

101. $\ln\left|x+\frac{9}{2}+\sqrt{x^2+9x+2}\right|+C.$ **102.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right|+C.$

103. $\frac{1}{\sqrt{17}}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{17}}{4x+1+\sqrt{17}}\right|+C.$ **104.** $\frac{1}{\sqrt{37}}\ln\left|\frac{6x+1-\sqrt{37}}{6x+1+\sqrt{37}}\right|+C.$

105. $\frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right|+C.$ **106.** $\frac{1}{3}arc\sin\frac{18x+1}{\sqrt{253}}+C.$

107. $\frac{1}{2}arc\sin\frac{4x+1}{\sqrt{33}}+C.$ **108.** $\frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3}+2\sqrt{x-1}+C.$

109. $2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C.$ **110.** $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}+C.$

111. $4\sqrt{x+1}-\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$ **112.** $2\sqrt{x-2}-2\ln\left|\sqrt{x-2}+1\right|+C.$

113. $x-8\sqrt{x}+32\ln\left|\sqrt{x}+4\right|+C.$ **114.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}-12\sqrt[3]{x+3}+48\ln\left|\sqrt[3]{x+3}+4\right|+C.$

115. $2\sqrt{x}+4arctg\frac{\sqrt{x}}{2}+C.$ **116.** $2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+C.$

117. $3\sqrt[3]{x}+15\ln\left|\sqrt[3]{x}-5\right|+C.$

118. $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-5x+\frac{100}{3}\sqrt[4]{x^3}-250\sqrt{x}+2500\sqrt[4]{x}-12500\ln\left|\sqrt[4]{x}+5\right|+C.$

119. $\dfrac{\sqrt{(2x+1)^3}}{6}-\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2}+C.$ **120.** $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3}}\right|+C.$

121. $\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}arctg\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}+C.$ **122.** $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{5}\left(x^2+2x+6\right)+C.$

123. $2\sqrt{e^x-4}-4arctg\dfrac{\sqrt{e^x-4}}{2}+C.$ **124.** $2arctg\sqrt{3x-1}+C.$

125. $\sqrt{4x-1}\left(\dfrac{(4x-1)^2}{160}+\dfrac{4x-1}{48}+\dfrac{1}{32}\right)+C.$ **126.** $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}\ln\left|e^x+3\right|+C.$

127. $\sqrt{2}arctg\sqrt{\dfrac{x}{2}}+C.$ **128.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|+C.$ **129.** $\sqrt{2}arctg\sqrt{\dfrac{x+2}{2}}+C.$

130. $arctg\dfrac{\sqrt{x-1}}{2}+C.$ **131.** $6\ln\left|\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}}\right|+C.$ **132.** $-x\cos x+\sin x+C.$

133. $\dfrac{x-4}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{9}\cos 3x+C.$ **134.** $-2(2x+3)\cos\dfrac{x}{2}+8\sin\dfrac{x}{2}+C.$

135. $xe^x-e^x+C.$ **136.** $-(x+1)e^{-3x}+C.$

137. $\dfrac{1}{2}x^3e^{2x}-\dfrac{3}{4}x^2e^{2x}+\dfrac{3}{4}xe^{2x}-\dfrac{3}{8}e^{2x}+C.$ **138.** $\dfrac{x\cdot 2^x}{\ln 2}-\dfrac{2^x}{\ln^2 2}+C.$

139. $\dfrac{(4x+5)3^x}{\ln 3}-\dfrac{4\cdot 3^x}{(\ln 3)^2}+C.$ **140.** $-\dfrac{x^2+7}{7^x\ln 7}-\dfrac{2x}{7^x\ln^2 7}-\dfrac{2}{7^x\ln^3 7}+C.$

141. $x10^x\lg e-10^x\lg^2 e+C.$ **142.** $\dfrac{1}{4}x^2e^{4x}-\dfrac{1}{8}xe^{4x}+\dfrac{1}{32}e^{4x}+C.$

143. $x^2\sin x+2x\cos x-\sin x+C.$ **144.** $\dfrac{1}{3}(1-2x)\sin 3x-\dfrac{2}{9}\cos 3x+C.$

145. $x\ln x-x+C.$ **146.** $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C.$

147. $\left(\dfrac{x^2}{4}-2\right)x^2\ln x-\dfrac{x^4}{16}+x^2+C.$ **148.** $x\ln\left(x^2+2\right)-2x+2\sqrt{2}arctg\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C.$

149. $\frac{3x+1}{3}\ln|3x+1|-x+C.$ **150.** $xtgx+\ln|\cos x|+C.$

151. $\frac{1}{3}xtg3x+\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|+C.$ **152.** $-\frac{1}{2}xctg2x+\frac{1}{4}\ln|\sin 2x|+C.$

153. $-\frac{1}{5}xctg5x+\frac{1}{25}\ln|\sin 2x|+C.$ **154.** $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)arctgx-\frac{1}{2}x+C.$

155. $xarcctgx+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C.$ **156.** $xarc\sin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

157. $-\frac{1}{x}\arccos x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}\right|+C.$ **158.** $\frac{e^x}{5}\left(2\sin 2x+\cos 2x\right)+C.$

159. $\frac{3e^{3x}}{82}\left(9\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{3}\right)+C.$ **160.** $\frac{4^x\left(\sin x\cdot\ln 4-\cos x\right)}{\ln^2 4+1}+C.$

161. $2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C.$ **162.** $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C.$

163. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+\frac{x\sqrt{2+x^2}}{2}+C.$ **164.** $x+\frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C.$

165. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln|2x+1|+C.$ **166.** $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{7}}{2x+\sqrt{7}}\right|+C.$ **167.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{2x}{\sqrt{5}}+C.$

168. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}}\right|+C.$ **169.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x+1}{\sqrt{5}x-1}\right|+C.$ **170.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C.$

171. $\frac{(2x+1)^2}{8}-\frac{2x+1}{4}+C.$ **172.** $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C.$

173. $\frac{2}{7}\sqrt{(x-3)^7}-\frac{12}{5}\sqrt{(x-3)^5}+6\sqrt{(x-3)^3}+C.$

174. $\frac{8}{81}\sqrt{(2-3x)^3}-\frac{8}{135}\sqrt{(2-3x)^5}+\frac{2}{189}\sqrt{(2-3x)^7}+C.$

175. $\frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}+\frac{6}{7}x^2\sqrt[3]{x}+C.$ **176.** $\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{4x}+C.$ **177.** $-2e^{-x}+\frac{1}{2}e^{2x}+C.$

178. $\frac{2}{3}\sqrt{\left(e^x-2\right)^3}+C.$ **179.** $\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{4^x}{\ln 4}+C.$ **180.** $2\lg e\cdot 10^x-\frac{30^x}{\ln 30}+C.$

181. $\frac{2\cdot 8^x}{\ln 2}+\frac{16^x}{4\ln 2}+C.$ **182.** $3e^{\sqrt[3]{x}}+C.$ **183.** $4\sin\sqrt[4]{x}+C.$ **184.** $-3\cos\sqrt[3]{x}+C.$

185. $-\frac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right|+C.$ **186.** $\frac{1}{2}\ln\left|\sin x^2\right|+C.$ **187.** $\frac{1}{2}\sin x^2+C.$

188. $-\frac{1}{2}\cos x^2+C.$ **189.** $\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{6}-\frac{\sqrt{2x+1}}{2}+C.$

190. $\frac{2}{27}\sqrt{(3x-2)^3}+\frac{4}{9}\sqrt{3x-2}+C.$ **191.** $\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C.$

192. $-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}+C.$ **193.** $\frac{2}{27}\sqrt{(3x+2)^3}-\frac{4}{9}\sqrt{3x+2}+C.$

194. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2-4}-\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-4}\right|+C.$ **195.** $\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+5}-\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+5}\right|+C.$

196. $-\frac{2}{3}\sqrt{4-3x^2}+\frac{5}{\sqrt{3}}arc\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}+C.$ **197.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right|+C.$

198. $\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{3}}+C.$ **199.** $\ln\left|\frac{2(x-1)}{2x-1}\right|+C.$ **200.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{8}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+2\right|+C.$

201. $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{18}{5}\sqrt[6]{x^5}+18\sqrt{x}-162\sqrt[6]{x}+27\sqrt{3}arctg\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{3}}+C.$

202. $\frac{6}{5}\cdot\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5}+\frac{1}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|+C.$ **203.** $\frac{x^2 3^x}{\ln 3}-\frac{2x3^x}{\ln^2 3}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln^3 3}+C.$

204. $\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

205. $-\frac{1}{4}x^2\cos 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$ **206.** $e^x\left(x^3-3x^2+8x-8\right)+C.$

207. $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C.$ **208.** $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)arctgx-\frac{1}{2}x+C.$

209. $\frac{1}{3}x^3arctgx-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C.$

210. $\frac{1}{2}(xarcctgx)^2+\frac{1}{2}arcctg^2x+xarcctgx+\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C.$

211. $\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}\right)\ln x-\frac{x^5}{25}+\frac{x^4}{8}+C.$ **212.** $x\ln\left(x^2-4\right)-2x-2\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$

213. $x\ln\left(x^2+3\right)-2x+2\sqrt{3}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

214. $\frac{1}{4}x^4\ln(x+2)-\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+2x-4\ln|x+2|+C.$

215. $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1}arctg2x-\frac{1}{4}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right|+C.$

216. $\frac{1}{9}\sqrt{9x^2+1}arcctg3x+\frac{1}{9}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2+1}\right|+C.$

217. $2\sqrt{x+1}arc\cos x-4\sqrt{1-x}+C.$ **218.** $-2\sqrt{1-x}arc\sin x+4\sqrt{1+x}+C.$

219. $xarctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}+C.$

220. $xarc\cos\sqrt{x}-\frac{1}{2}arc\sin\sqrt{1-x}-\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}+C.$

221. $-\ln|x+2|+3\ln|x-6|+C.$ **222.** $3\ln|x-1|-\frac{9}{10}\ln|2x+3|+C.$

223. $\ln|x|+\frac{1}{7}\ln|x+4|-\frac{1}{7}\ln|x-3|+C.$ **224.** $x+\frac{7}{2}\ln|x-3|+\frac{7}{2}\ln|x+1|+C.$

225. $\frac{x^2}{2}-4x-\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{21}{4}\ln|x+2|+C.$

226. $-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-2|+C.$ **227.** $-\frac{4}{25}\ln|x+2|-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{21}{25}\ln|x-3|+C.$

228. $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right|-2arctg(x-1)+C.$

229. $x-2\ln|x|+\ln\left|x^2+4\right|-2arctg\frac{x}{2}+C.$

230. $5\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{5}{4}\ln\left|x^2+2\right|+2\sqrt{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$ **231.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+5\right|+2\ln|x-2|+C.$

232. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{5}{2}arctg\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6\right|+\sqrt{6}arctg\frac{x}{\sqrt{6}}+C.$

233. $\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+2\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

234. $-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C.$

235. $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+2arctg\frac{x}{2}+C.$ **236.** $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C.$

237. $\frac{1}{4}arctg\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\ln|x-2|-\frac{1}{8}\ln|x+2|+C.$ **238.** $\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-3|-\frac{2}{3}\ln|x+3|+C.$

239. $\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$ **240.** $\frac{1}{52}\sin 13x+\frac{1}{28}\sin 7x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{4}\sin x+C.$

241. $-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x+C.$ **242.** $\frac{1}{40}\cos 10x-\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x+C.$

243. $\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{20}\sin 10x+C.$ **244.** $\frac{1}{36}\cos 9x-\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{1}{4}\cos x+C.$

245. $\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\sin 6x+C.$ **246.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C.$ **247.** $\frac{3}{8}x-\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin x+C.$

248. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{96}\sin 12x+C.$ **249.** $\frac{3}{4}tg^4x-\frac{3}{2}tg^2x+tgx-3\ln|\cos x|-x+C$ **.**

250. $\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}-\ln|\cos x|+C$ **.** **251.** $-\frac{ctg^5x}{5}+\frac{ctg^3x}{3}-ctgx-x+C$ **.**

252. $\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{3}{8}\sin 2x+C.$ **253.** $-\frac{1}{160}\cos 10x+\frac{5}{96}\cos 6x-\frac{5}{16}\cos 2x+C.$

254. $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C.$ **255.** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.$ **256.** $\frac{3}{4\sqrt[3]{\cos^4 x}}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{\cos^2 x}+C.$

257. $5\sqrt[5]{\sin x}+\frac{5}{11}\sqrt[5]{\sin^{11} x}+C.$ **258.** $\frac{9}{2}x+4\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

259. $\frac{33x}{2}+4\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$ **260.** $\ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right|-\ln\left|tg\frac{x}{2}-1\right|+C.$

261. $\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{5tg\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{6}}+C.$ **262.** $\ln\sqrt[5]{\left|\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{2tg\frac{x}{2}-4}\right|}+C.$ **263.** $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+2}{\sqrt{3}}+C.$

264. $\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{4tg\frac{x}{2}-3}{\sqrt{7}}+C.$ **265.** $\frac{2}{\sqrt{21}}arctg\frac{\sqrt{7}tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C.$ **266.** $\ln\sqrt[4]{\left|\frac{5tg\frac{x}{2}+3}{5tg\frac{x}{2}-5}\right|}+C.$

267. $arctg\left(tg\frac{x}{2}-1\right)+C.$ **268.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2+\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}-2-\sqrt{5}}\right|+C.$

269. $-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{7tg\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{5}}+C.$ **270.** $\frac{1}{2}tgx+C.$ **271.** $\frac{1}{2\sqrt{7}}arctg\frac{2tgx}{\sqrt{7}}+C.$

272. $-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}ctgx\right)+C.$ **273.** $\frac{1}{5}\ln|tgx+2|-\frac{1}{10}\ln\left|tg^2x+1\right|+\frac{2}{5}x+C.$

274. $\frac{3}{10}\ln|ctgx-3|-\frac{3}{20}\ln\left|ctg^2x+1\right|+\frac{1}{10}arctg(ctgx)+C.$

275. $\frac{1}{4}\ln\left|2tg^2x+tgx+1\right|-\frac{3}{2\sqrt{7}}arctg\frac{4tgx+1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{4}\ln\left|tg^2x+1\right|-\frac{1}{2}x+C.$

276. $\frac{13x}{10}-\frac{3}{10}\ln|tgx+3|-\frac{1}{20}\ln\left|tg^2x+1\right|+C.$ **277.** $-\frac{1}{2tgx}-\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}+C.$

278. $\frac{1}{4\sqrt{6}}arctg\frac{\sqrt{2}ctgx}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}ctgx\right)+C.$ **279.** $\frac{1}{6}tg^3\frac{x}{2}+\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+C.$

280. $x-\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}+C.$ **281.** $x-\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C.$

282. $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$ **283.** $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}\sin x+C.$

284. $2\ln|tgx|+\frac{1}{2}tgx+C.$ **285.** $\sqrt{\sin x}\left(2-\frac{4}{5}\sin^2x+\frac{2}{9}\sin^4x\right)+C.$

286. $\sqrt[3]{\cos^2x}\left(\frac{3}{14}\cos^4x-\frac{3}{4}\cos^2x-\frac{3}{2}\right)+C.$

287. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

288. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$ **289.** $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

290. $\frac{1}{192}\left(12x-3\sin 4x-3\sin 2x+\sin 6x\right)+C.$

291. $\frac{1}{192}\left(12x-3\sin 4x+3\sin 2x-\sin 6x\right)+C.$

292. $\sin x-\sin^3 x+\frac{3\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C.$ **293.** $-ctgx-\frac{ctg^3 x}{3}+C.$

294. $tgx+\frac{tg^3 x}{3}+C.$ **295.** $\frac{1}{3ctg^3 x}+\frac{2}{ctgx}-ctgx+C.$ **296.** $tgx-\frac{2}{tgx}-\frac{1}{3tg^3 x}+C.$

297. $-\frac{1}{4tg^4 x}-\frac{1}{tg^2 x}+\ln\left|tgx\right|+C.$ **298.** $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C.$

299. $-\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C.$ **300.** $-ctgx-\frac{2}{3}ctg^3 x-\frac{ctg^5 x}{5}+C.$

301. $\ln\left|tgx\right|+C.$ **302.** $\frac{1}{3}\ln\left|tg3x\right|+C.$ **303.** $-2ctg2x+C.$

304. $-\frac{2}{5}ctg10x+C.$ **305.** $-4ctgx+C.$ **306.** $-6ctg\frac{2x}{3}+C.$

307. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{3}\ln\left|\sqrt{x}+5\right|+C.$ **308.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{24}{7}\sqrt[12]{x^7}+C.$

309. $\frac{12}{11}\sqrt[12]{x^{11}}-\frac{18}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{44}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{99}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1188}{7}\sqrt[12]{x^7}-594\sqrt{x}+\frac{10692}{5}\sqrt[12]{x^5}-$

$-8019\sqrt[3]{x}+8019\sqrt[4]{x}-144342\sqrt[6]{x}+866052\sqrt[12]{x}-2598156\ln\left|\sqrt[12]{x}+3\right|+C.$

310. $\frac{42}{5}\sqrt[14]{x^5}-21\sqrt[7]{x^2}+56\sqrt[14]{x^3}-168\sqrt[7]{x}+576\sqrt[14]{x}-1344\ln\left|\sqrt[14]{x}+2\right|+C.$

311. $\sqrt{x}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}+\frac{3}{4}\sqrt[6]{x}-\frac{1}{8}\ln\left|2\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$

312. $\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{6}-2x-1+\frac{15}{2}\sqrt{2x+1}-30\ln\left|\sqrt{2x+1}+4\right|+C.$

313. $\frac{2}{5}\sqrt{(3-x)^5}-2\sqrt{(3-x)^3}+C.$ **314.** $\frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3}+C.$

315. $2\sqrt{2x+5}+\frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{5}}\right|+C.$

316. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+3arctg\sqrt[6]{x}-9\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$

317. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+4\sqrt{x}+81\sqrt[3]{x}+18\ln\left|\sqrt{x}-27\right|+81\ln\left|\sqrt[6]{x}-3\right|-\frac{81}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}+9\right|+$

$+81\sqrt{3}arctg\,\frac{2\sqrt[6]{x}+3}{3\sqrt{3}}+C.$ **318.** $\frac{1}{12}\sqrt{(2x-1)^3}+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}-\frac{1}{4\sqrt{2x-1}}+C.$

319. $-6\sqrt[6]{x}-9\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-3}{\sqrt[6]{x}+3}\right|+C.$ **320.** $4\sqrt[4]{x}-6\sqrt[6]{x}+12\sqrt[12]{x}+3\ln|x|-48\left|\sqrt[12]{x}+1\right|+C.$

321. .$3\sqrt[3]{x+2}+6\sqrt[6]{x+2}+6\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|+C$. **322.** $2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$

323. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-12\sqrt[6]{x}+60\ln\left|\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+3\right|+\frac{168}{\sqrt{11}}arctg\,\frac{2\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{11}}+C.$

324. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+3)^4}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+3)^7}-x-3+\frac{6}{5}\sqrt[3]{(x+3)^5}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{(x+3)^2}-$

$-4\sqrt{x+3}++6\sqrt[3]{x+3}-12\sqrt[6]{x+3}+12\ln\left|\sqrt[6]{x+3}+1\right|+C.$

325. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{(4+x)^5}-6\sqrt[3]{(4+x)^2}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{(4+x)^7}+C$. **326.** $-ctgarc\sin\frac{x}{4}-arc\sin\frac{x}{4}+C$.

327. $\frac{81}{4}arc\sin\frac{x}{3}-\frac{81}{16}\sin 4arc\sin\frac{x}{3}+C.$ **328.** $-\frac{1}{4\sin arctg\,\frac{x}{2}}+C.$

329. $5tgarc\cos\frac{5}{x}-5arc\cos\frac{5}{x}+C.$ **330.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|tg\,\frac{arctg\,\frac{x}{\sqrt{7}}}{2}\right|+C.$

331. $tg\left(arc\sin\frac{x}{3}\right)+C.$ **332.** $\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right|-\frac{1}{\sin arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}}+C.$

333. $-\frac{1}{6\sin arctg\,\frac{x}{\sqrt{6}}}+C.$ **334.** $\frac{1}{3}tg^3arc\cos\frac{\sqrt{5}}{x}+tgarc\cos\frac{\sqrt{5}}{x}+C.$

335. $\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}arc\cos\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\right|-\frac{1}{\sin arc\cos\frac{\sqrt{2}}{x}}+C.$

336. $-\frac{1}{3}ctg\left(arc\sin\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{3}arc\sin\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

337. $\frac{1}{2\cos\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}+\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\cos\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+1}{\cos\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-1}\right|-\frac{1}{4}\frac{\cos\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sin^2\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}+C.$

338. $\frac{1}{15}\sin^3\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C.$ **339.** $\frac{49\sqrt{7}}{3}tg^3\left(\arccos\frac{\sqrt{7}}{x}\right)+\frac{49\sqrt{7}}{5}tg^5\left(\arccos\frac{\sqrt{7}}{x}\right)+C.$

340. $\frac{25}{8}arc\sin\frac{x}{\sqrt{5}}-\frac{25}{32}\sin\left(4arc\sin\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C.$ **341.** $\sin\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C.$

342. $\frac{1}{4}arc\cos\frac{2}{x}-\frac{1}{8}\sin 2\left(arc\cos\frac{2}{x}\right)+C.$

343. $-\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\cos\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{6}}\right)+1}{\cos\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{6}}\right)-1}\right|-\frac{1}{2\sqrt{6}}\frac{\cos\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{6}}\right)}{\sin^2\left(arctg\,\frac{x}{\sqrt{6}}\right)}+C.$

§4. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Знайти невизначені інтеграли:

1.1. а) $\int\left(3x^5-\frac{7}{x}+\sin 2x\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{5-4x^2}$; в) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

г) $\int(2x-1)\sin x dx$; д) $\int\frac{2x-7}{(x-1)\left(x^2+4\right)}dx$; е) $\int \mathrm{tg}\,3x dx$;

є) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; ж) $\int\sqrt{9-x^2}dx$; з) $\int\frac{xdx}{x^2-4x+5}$.

1.2. а) $\int\left(\frac{x^4}{3}+\frac{2}{\sqrt{x}}-5e^{-x}-3\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{4+5x^2}$; в) $\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$;

г) $\int x\cos 2x dx$; д) $\int \frac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx$; е) $\int \sin^4 x dx$;

є) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+1)}$; ж) $\int \sqrt{9+x^2}dx$; з) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

1.3. а) $\int \left(5x^2-\frac{x}{3}+4+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-4x^2}}$; в) $\int \frac{e^x dx}{5e^x+2}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$; д) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; е) $\int \frac{dx}{3+\cos x}$;

є) $\int (x+1)e^x dx$; ж) $\int \frac{7x+10}{(x-2)(x^2+4)}dx$; з) $\int \sqrt{x^2-4}dx$.

1.4. а) $\int \left(2x^3-3\sqrt[3]{x}+1-\frac{dx}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg} x+4)}$;

г) $\int (x-2)\sin 2x dx$; д) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; е) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x+1}$;

є) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x-1}}$; ж) $\int \frac{4x+13}{(x+2)(x^2+1)}dx$; з) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

1.5. а) $\int \left(\frac{x^4}{2}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\cos x+1\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{3x^2-5}$; в) $\int \frac{x^3 dx}{4x^8+9}$;

г) $\int (3x+2)\cos x dx$; д) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2-4x+5}$; е) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^3 x dx$;

є) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}}dx$; ж) $\int \frac{9x-1}{(x-3)(x^2+4)}dx$; з) $\int \sqrt{9+x^2}dx$.

1.6. а) $\int \left(\frac{2x^3}{9}-3\sqrt{x}-\frac{5}{x}-10\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{9-\operatorname{ctg}^2 x}}$;

г) $\int(2x-1)e^{x}dx$; д) $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$; е) $\int\frac{dx}{4-5\sin x}$;

є) $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$; ж) $\int\frac{3x-7}{(x-1)(x^2+1)}dx$; з) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

1.7. а) $\int\left(5x^2+\frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}-3\cdot 2^x-4\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{9+3x^2}$; в) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

г) $\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$; д) $\int\frac{5x+1}{16x^2+8x+5}dx$; е) $\int\sin^2 x\cos^3 xdx$;

є) $\int\frac{dx}{3\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$; ж) $\int\frac{5x+18}{(x+2)(x^2+4)}dx$; з) $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

1.8. а) $\int\left(3x^5-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{5}{x^2}+8\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$; в) $\int\frac{dx}{(1+x^2)(\mathrm{arctg}^2 x-3)}$;

г) $\int(5x+3)\sin 2xdx$; д) $\int\frac{2x-3}{\sqrt{5x-x^2}}dx$; е) $\int\frac{3+\mathrm{tg}\,x}{2\sin^2 x+7\cos^2 x}dx$;

є) $\int\frac{dx}{3+\sqrt{1-x}}$; ж) $\int\frac{7x-1}{(x-3)(x^2+1)}dx$; з) $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

1.9. а) $\int\left(5x^7-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}+3e^x+2\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; в) $\int\frac{e^x dx}{4e^{2x}+9}$;

г) $\int\ln xdx$; д) $\int\frac{3x-2}{6-4x-x^2}dx$; е) $\int\sqrt{\cos x+1}\sin xdx$;

є) $\int\frac{dx}{2+\sqrt[3]{x+2}}$; ж) $\int\frac{8x-7}{(x+1)(x^2+4)}dx$; з) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

1.10. а) $\int\left(\frac{x^{11}}{7}-\frac{4}{\sqrt{x}}+2\cos 2x-\sqrt{2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{4-5x^2}$; в) $\int\frac{dx}{x\sqrt{4\ln^2 x+6}}$;

г) $\int(2x-3)\sin 2x dx$; д) $\int\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-8x+17}}dx$; е) $\int\mathrm{tg}^3 2x dx$;

є) $\int\frac{x-3}{x\sqrt{3x-1}}dx$; ж) $\int\frac{3x-16}{(x-2)\left(x^2+1\right)}dx$; з) $\int\frac{x^2dx}{\left(16-x^2\right)^{3/2}}$.

1.11. а) $\int\left(2x^6+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}-\frac{4}{\sin^2 x}+\pi\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{4x^2-25}$; в) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{9-\mathrm{ctg}^2 x}}$;

г) $\int\mathrm{arctg}\, x dx$; д) $\int\frac{x+9}{3x^2+6x+7}dx$; е) $\int\frac{dx}{9-7\,\mathrm{tg}\, x}$;

є) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}$; ж) $\int\frac{3x+7}{(x-1)\left(x^2+9\right)}dx$; з) $\int\frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx$.

1.12. а) $\int\left(\frac{x^3}{3}+2\sqrt[5]{x}-\cos x+e^2\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{16x^2+2}}$; в) $\int\frac{x^4dx}{5x^5-2}$;

г) $\int(4x+1)e^{-x}dx$; д) $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$; е) $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 x dx$;

є) $\int\frac{dx}{3\sqrt{1-5x}-\sqrt[3]{1-5x}}$; ж) $\int\frac{2x-4}{(x+3)\left(x^2+1\right)}dx$; з) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

1.13. а) $\int\left(7x^4-\frac{3}{x^5}+2\sqrt{x}-\frac{1}{\sin^2 x}+\pi\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{16x^2-1}$; в) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}$;

г) $\int(x+1)\ln(x+1)dx$; д) $\int\frac{3x+7}{4x^2+6x+1}dx$; е) $\int\frac{dx}{6\sin x+\cos x}$;

є) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}-4\sqrt[3]{x+3}}$; ж) $\int\frac{5x+3}{(x-2)\left(x^2+9\right)}dx$; з) $\int\sqrt{36-x^2}dx$.

1.14. а) $\int\left(2x^7+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{\cos^2 x}-7\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{9x^2+7}$; в) $\int\frac{x^3dx}{3x^4-2}$;

г) $\int(x+1)\sin 2xdx$; д) $\int\frac{7x-6}{\sqrt{15+24x-36x^2}}dx$; е) $\int\frac{1+\sin x}{\cos x}dx$;

є) $\int\frac{x-4}{x\sqrt{2-3x}}dx$; ж) $\int\frac{4x-1}{(x+3)\left(x^2+4\right)}dx$; з) $\int\frac{dx}{\left(64+x^2\right)^{3/2}}$.

1.15. а) $\int\left(-2x+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+e^x-1\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2-16}}$; в) $\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x+4}$;

г) $\int(3x-1)\cos 3xdx$; д) $\int\frac{5x-6}{x^2-6x-8}dx$; е) $\int\frac{dx}{9+4\operatorname{tg}x}$;

є) $\int\frac{dx}{3-\sqrt[3]{4x+1}}$; ж) $\int\frac{8x+3}{(x+2)\left(x^2+9\right)}dx$; з) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

1.16. а) $\int\left(\frac{x^5}{5}-2\sqrt[4]{x^3}-2^x+4\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; в) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos^2 x-1}}$;

г) $\int\operatorname{arctg}5xdx$; д) $\int\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-6x-8}}dx$; е) $\int\frac{dx}{\sin x+3\cos x}$;

є) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}$; ж) $\int\frac{3-5x}{(x+3)\left(x^2+9\right)}dx$; з) $\int\frac{x^2dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$.

1.17. а) $\int\left(5x-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{10}{x}-1\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{3x^2-4}$; в) $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{9-4x^2}}$;

г) $\int(4x+1)e^{-x}dx$; д) $\int\frac{x-2}{3x^2-6x+7}dx$; е) $\int\frac{1+\cos x}{\sin x}dx$;

є) $\int\frac{5x-2}{x\sqrt{3-2x}}dx$; ж) $\int\frac{7-3x}{(x+1)\left(x^2+9\right)}dx$; з) $\int\frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}dx$.

1.18. а) $\int\left(3x^2-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+\sin x+2\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{4x^2+3}$; в) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+7}}$;

г) $\int(x-4)\sin 2x\,dx$; д) $\int\frac{dx}{3+4\operatorname{tg}x}$; е) $\int\frac{3x+1}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx$;

є) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}}$; ж) $\int\frac{3-7x}{(x+1)\left(x^2+9\right)}dx$; з) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

1.19. а) $\int\left(4x^3-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\cos x-1\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{4x^2+9}$; в) $\int\frac{dx}{\cos^2 x(5\operatorname{tg}x-4)}$;

г) $\int(2x+5)\cos 3x\,dx$; д) $\int\frac{3x+5}{4x^2-4x+7}dx$; е) $\int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x}$;

є) $\int\frac{3+2x}{x\sqrt{2+x}}dx$; ж) $\int\frac{16-3x}{x\left(x^2+16\right)}dx$; з) $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$.

1.20. а) $\int\left(2x^4\frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}+\frac{1}{\cos^2 x}-2\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$; в) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\left(\operatorname{ctg}^2 x+4\right)}$;

г) $\int\sqrt{x+1}\ln(x+1)dx$; д) $\int\sin^4 3x\,dx$; е) $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx$;

є) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x}-2\sqrt[3]{2-x}}$; ж) $\int\frac{1-9x}{(x+1)\left(x^2+4\right)}dx$; з) $\int\frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{4+x^2}}$.

1.21. а) $\int\left(3x^5-\sqrt[3]{x}-\frac{7}{\sin^2 x}+e^2\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{7x^2-16}$; в) $\int\frac{x^2dx}{4x^6+1}$;

г) $\int(x-5)e^{3x}dx$; д) $\int\frac{x+4}{9x^2+6x-2}dx$; е) $\int\cos^4 4x\,dx$;

є) $\int\frac{dx}{4-3\sqrt{2-x}}$; ж) $\int\frac{7x+1}{(x+3)\left(x^2+1\right)}dx$; з) $\int\frac{x^2dx}{\left(9-x^2\right)^{3/2}}$.

1.22. а) $\int\left(\frac{x}{4}+\frac{3}{\sqrt[6]{x^5}}-\frac{5}{x}+2\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{4x^2+25}$; в) $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}$;

г) $\int(2x-3)\cos 5x dx$; д) $\int \mathrm{tg}^3 2x dx$; е) $\int\frac{x-1}{\sqrt{4-8x-x^2}}dx$;

є) $\int\frac{2-3x}{x\sqrt{1-2x}}dx$; ж) $\int\frac{5x+6}{(x-2)\left(x^2+4\right)}dx$; з) $\int\frac{dx}{\left(25+x^2\right)\sqrt{25+x^2}}$.

1.23. а) $\int\left(3x^2-\sqrt[7]{x^3}+e^x-\sqrt{2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-7}}$; в) $\int\frac{\sin x dx}{4\cos^2 x-9}$;

г) $\int(3x+2)\sin 4x dx$; д) $\int \mathrm{ctg}^3 x dx$; е) $\int\frac{x+2}{3x^2-6x+7}dx$;

є) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}$; ж) $\int\frac{8x+1}{(x+2)\left(x^2+1\right)}dx$; з) $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

1.24. а) $\int\left(\frac{x^3}{2}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+\sin x-\sqrt{3}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$; в) $\int\frac{dx}{x(5\ln x+1)}$;

г) $\int\arcsin x dx$; д) $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}dx$; е) $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$;

є) $\int\frac{dx}{2\sin x+\cos x+1}$; ж) $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{2-x}}$; з) $\int\frac{3x+5}{(x-4)\left(x^2+1\right)}dx$.

1.25. а) $\int\left(2x^4-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{\sqrt{x}}-\pi\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{3x^2-25}$; в) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(4\,\mathrm{tg}^2 x+1\right)}$;

г) $\int\sin^3 x\sqrt[4]{\cos^3 x}dx$; д) $\int(5x+4)e^{-2x}dx$; е) $\int\frac{x dx}{2x^2+4x+7}$;

є) $\int\frac{1-3x}{x\sqrt{3-2x}}dx$; ж) $\int\frac{8x+9}{(x-1)\left(x^2+16\right)}dx$; з) $\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

1.26. а) $\int\left(\frac{x^5}{3}+2x^{1/2}+\frac{5}{\sin^2 x}-3\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{25x^2+3}$; в) $\int\frac{(\arcsin x-1)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

г) $\int(2x-1)\sin 4x dx$; д) $\int\frac{x-1}{\sqrt{7-4x-x^2}}dx$; е) $\int\frac{1+\sin^2 x}{\cos x}dx$;

є) $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$; ж) $\int\frac{9x+2}{(x+4)\left(x^2+1\right)}dx$; з) $\int\frac{dx}{\left(36+x^2\right)^{3/2}}$.

1.27. а) $\int\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+\cos x+2\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{25x^2+3}$; в) $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{3-\operatorname{arctg}^2 x}}$;

г) $\int(3x+2)\cos 5x dx$; д) $\int\frac{6x+5}{9x^2+3x+1}dx$; е) $\int\frac{dx}{(7+9\operatorname{tg}x)\sin 2x}$;

є) $\int\frac{dx}{3-2\sqrt{1+x}}$; ж) $\int\frac{10x-7}{(x+1)\left(x^2+16\right)}dx$; з) $\int\frac{x^2}{\left(36-x^2\right)^{3/2}}dx$.

1.28. а) $\int\left(3x^2-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\frac{4}{\cos^2 x}-1\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-100x^2}}$; в) $\int\frac{e^x dx}{4e^x-5}$;

г) $\int x^2\ln x dx$; д) $\int\frac{(9-x)dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}}$; е) $\int\sin^4 x dx$;

є) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}}$; ж) $\int\frac{7x+2}{(x-2)\left(x^2+4\right)}dx$; з) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$.

1.29. а) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^2}+e^x-3\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$; в) $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{3\sin x-5}}$;

г) $\int(5x+2)e^{-3x}dx$; д) $\int\operatorname{tg}^3 2x dx$; е) $\int\frac{4x-7}{x^2-6x+10}dx$;

є) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}+\sqrt[3]{2-5x}}$; ж) $\int\frac{1-5x}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx$; з) $\int\sqrt{64-x^2}dx$.

1.30. а) $\int\left(2x^4-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-3^x-\sqrt{2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{9x^4+4}$; в) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{4-3\cos^2 x}}$;

г) $\int(3x-1)\sin 2xdx$; д) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{36-x^2}}$; е) $\int\frac{6x+5}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx$;

є) $\int\frac{5-\operatorname{tg}x}{5\cos^2 x-3}dx$; ж) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-3x}+2\sqrt[3]{1-3x}}$; з) $\int\frac{10+x}{(x+2)\left(x^2+4\right)}dx$.

Розділ ІІ. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

---

§1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Задача про площу криволінійної трапеції

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано неперервну функцію $y=f(x)\geq 0$.

Означення. *Криволінійною трапецією* називається плоска фігура, що обмежена лініями $y=f(x)\geq 0,\ y=0,\ x=a,\ x=b.$

Обчислимо площу криволінійної трапеції S_{aABb}.

1. Розіб'ємо проміжок $[a;b]$ на n частин точками $x_i,\ i=\left(\overline{0,n}\right)$ так, що $a=x_0,\ b=x_n:\ a=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_n=b.$
2. Виберемо точки ξ_i таким чином: $x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i$ і обчислимо в них функцію $f\left(\xi_i\right)$. Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ і висотою $f\left(\xi_i\right)$. Площа елементарного прямокутника з основою Δx_i і висотою $f\left(\xi_i\right)$ дорівнює добутку $f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$.
3. Площа ступінчастої фігури $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції S_{aABb}, чим менша довжина $\max\Delta x_i$. За площу криволінійної трапеції будемо вважати величину

$$S_{aABb}=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i.$$

<u>Задача про роботу змінної сили</u>

Обчислимо роботу A змінної сили F, що виконується при переміщенні матеріальної точки на проміжку $x \in [a;b]$. Сила F є сталою за напрямом і неперервно змінюється за величиною.

За умовою сила F є неперервною функцією від x: $F = f(x)$.

Розіб'ємо проміжок $[a;b]$ на n частин точками x_i, $i = (\overline{0,n})$.
Кожний з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо таким малим, що силу F на ньому можна вважати сталою і рівною $f(\xi_i)$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.

Елементарна робота сили на відрізку Δx_i буде рівною добутку $f(\xi_i)\Delta x_i$. Оскільки робота на відрізку $[a;b]$ дорівнює сумі робіт на всіх частинних відрізках , то $A \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Ця наближена рівність тим точніша, чим менші довжини Δx_i.

Тому за роботу сили F на шляху $[a;b]$ можна вважати границю одержаної суми

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i .$$

До поняття визначеного інтеграла приводять також задачі про пройдений шлях, про масу неоднорідного стержня та інші задачі фізики та механіки.

1.2. ОЗНАЧЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА, ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

Розглянемо неперервну на відрізку $[a, b]$ функцію $f(x)$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками x_i, $i = (\overline{0,n})$ так, що $a = x_0$, $b = x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b)$. Виберемо на кожному відрізку $[x_{i-1};\ x_i]$ довільну точку ξ_i і позначимо довжину кожного такого відрізка через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Складемо суму

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 < \ldots < f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i , \qquad (2.1)$$

яка називається ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Означення. Якщо існує скінчена границя інтегральної суми (2.1) при $\max \Delta x_i \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізку $[a, b]$ на частини, ні від вибору точок $\xi_i \in [x_{i-1};\ x_i]$, то ця границя називається ***визначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Отже,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i . \tag{2.2}$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, a і b – межі інтегрування, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Основні властивості визначеного інтеграла

1°. При перестановці меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx .$$

2°. Визначений інтеграл з рівними нижньою і верхньою межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0 .$$

3°. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx ,$$

де k – довільне число.

4°. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від доданків:

$$\int_a^b \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx .$$

5° *(Властивість адитивності).* Якщо точка $x = c$ розбиває відрізок $[a, b]$ на два відрізки $[a, c]$ і $[c, b]$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

6°. Якщо $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a, b]$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

7°.Якщо на відрізку $[a, b]$ дві функції задовольняють нерівності $f(x) \geq \varphi(x)$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx .$$

8°. Якщо m і M – відповідно найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, тоді

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

9°. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, тоді на цьому відрізку знайдеться точка c, така що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad \text{або} \qquad f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx .$$

1.3. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Формула Ньютона-Лейбніца

Метод складання інтегральних сум і знаходження границі таких сум є дуже громіздким і не використовується на практиці для обчислення визначених інтегралів.

Якщо $F(x)$ є довільною первісною для функції $f(x)$ неперервної на відрізку $[a, b]$, то визначений інтеграл на цьому відрізку можна обчислити за формулою

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}, \tag{2.3}$$

яка називається ***формулою Ньютона-Лейбніца***.

Методи обчислення визначених інтегралів ті самі, що й для невизначених, а саме: *метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки та метод інтегрування частинами*.

Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод ґрунтується на застосуванні властивостей визначеного інтеграла та формули Ньютона-Лейбніца.

Приклади.

1. $\int_2^3 e^x dx = e^x \Big|_2^3 = e^3 - e^2$.

2. $\int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$.

3. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1/2} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$.

Метод підстановки (заміни змінної)

Припустимо, що функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, а функція $x = \varphi(t)$ задовольняє умови

1) $x = \varphi(t)$ визначена і неперервна на відрізку $[t_1, t_2]$, причому $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$;

2) $\varphi'(t)$ – неперервна на відрізку $[t_1, t_2]$, тоді

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt}. \qquad (2.4)$$

Приклад.

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+3} = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{2x+1},\ t^2=2x+1,\ x=\dfrac{t^2-1}{2},\ dx=tdt \\ 0=\dfrac{t_1^2-1}{2} \ \Rightarrow t_1=1, \quad 4=\dfrac{t_2^2-1}{2} \ \Rightarrow t_2=3 \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{tdt}{t+3} =$$

$$= \int_1^3 \frac{(t+3-3)\,dt}{t+3} = \int_1^3 \left(1-\frac{3}{t+3}\right)dt = \left(t-3\ln|t+3|\right)\Big|_1^3 = 3-1-3(\ln 6-\ln 4) = 2-3\ln\frac{3}{2}.$$

<u>**Метод інтегрування частинами**</u>

Нехай функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$ неперервно диференційовні на проміжку $[a,b]$. Тоді справедлива формула

$$\boxed{\int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu}, \qquad (2.5)$$

яку називають ***формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі***.

Приклад.

$$\int_{-1}^0 (x+1)e^{2x}dx = \left| \begin{array}{ll} u=x+1, & dv=e^{2x}dx \\ du=dx, & v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = \frac{x+1}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{1}{2}e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 - 0 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^2}.$$

1.4. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Поняття визначеного інтеграла було введено для скінченного проміжку інтегрування та функцій, визначених і неперервних на цьому проміжку. Але під час розв’язування практичних задач виникає необхідність розглядати інтеграли на нескінченному проміжку або від необмеженої функції. Такі інтеграли називають ***невласними***.

Невласні інтеграли I роду

Означення. Нехай функція $f(x)$ неперервна при $x \in [a, +\infty)$, тоді

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2.6)$$

називають ***невласним інтегралом I-го роду або інтегралом із нескінченними межами***.

Якщо границя (2.6) існує і є скінченною, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а якщо така границя не існує або є нескінченною, то невласний інтеграл називають ***розбіжним***.

Аналогічно вводяться невласні інтеграли на $(-\infty;\ b]$ та $(-\infty;\ +\infty)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx}, \qquad (2,7)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx}. \qquad (2.8)$$

Приклад.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right)\Bigg|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1 \text{ − інтеграл збіжний.}$$

Часто немає потреби обчислювати інтеграл, а необхідно встановити збіжний чи розбіжний даний інтеграл.

Для цього достатньо порівняти даний інтеграл з таким невласним інтегралом, про який відомо − збіжний він, чи розбіжний.

Ознака порівняння 1. *Якщо на інтервалі* $[a, +\infty)$ *функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *неперервні і задовольняють нерівності* $0 \le \varphi(x) \le f(x)$, *тоді:*

а) якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *збіжний, то збіжний і інтеграл* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$;

б) якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *розбіжний, то інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *також розбіжний.*

<u>Гранична ознака.</u> *Якщо існує границя* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k, 0 < k < \infty$, *то невласні інтеграли* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *і* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.*

<u>Ознака порівняння 2.</u> *Якщо на проміжку* $[a, +\infty)$ *невласний інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *збігається, то збігається і інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад (теоретичний). Дослідити інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}$.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{matrix}\nearrow 0, \text{ якщо } \alpha > 1,\\ \searrow \infty, \text{ якщо } \alpha < 1.\end{matrix}$$

Якщо $\alpha = 1$:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}(\ln x)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty \text{ – розбіжний.}$$

Отже, $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}\begin{matrix}\nearrow \text{ збігається при } \alpha > 1,\\ \searrow \text{ розбігається при } \alpha \le 1.\end{matrix}$

Приклад. Дослідити $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{7x+2}{5x^2\sqrt{x}+3}dx$.

Позначимо $f(x) = \dfrac{7x+2}{5x^2\sqrt{x}+3}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{(7x+2)\cdot x^{3/2}}{\left(5x^2\sqrt{x}+3\right)\cdot 1}=\frac{7}{5};$$

Тоді $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ – збіжний, $\alpha=\frac{3}{2}>1$, звідси і $\int\limits_1^{+\infty}\frac{7x+2}{5x^2\sqrt{x}+3}dx$ – збіжний.

<u>Невласні інтеграли ІІ роду</u>

Нехай функція $f(x)$ неперервна у всіх точках відрізку $[a,\ b]$ за винятком однієї точки $x=c$, яка є точкою розриву ІІ роду.

Тоді невласний інтеграл від цієї функції визначається наступним чином

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}, \qquad (2.9)$$

де $\varepsilon>0$ − нескінченно мала величина.

Якщо обидві границі формули (2.9) існують, тоді невласний інтеграл називається ***збіжним***.

Зауваження. Точка розриву $x=c$ може співпадати із будь-яким кінцем відрізка $[a,\ b]$.

Якщо точка розриву c збігається з точкою a, то

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}, \qquad (2.10)$$

а якщо точка розриву c збігається з точкою b, то

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}. \qquad (2.11)$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\ln x}$.

Це невласний інтеграл II роду, оскільки підінтегральна функція необмежена в околі точки $x=1$ $(\ln 1=0)$

$$\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\ln x|\Big|_{1+\varepsilon}^{e}=$$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\ln e-\ln\ln(1+\varepsilon)\right)=0-(-\infty)=\infty$ − інтеграл розбіжний.

Зауваження. Ознаки порівняння невласних інтегралів II роду є аналогічними ознакам порівняння невласних інтегралів I роду.

Ознака порівняння. *Якщо функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *на напівінтервалі* $[a;b)$ *неперервні і задовольняють нерівності* $0\le\varphi(x)\le f(x)$, *а в точці* $x=b$ *мають розрив II роду, тоді:*

а) якщо інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ *збіжний, то збіжний і інтеграл* $\int_a^b \varphi(x)dx$;

б) якщо інтеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ *розбіжний, то інтеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *розбіжний.*

1.5. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Обчислення площі плоскої фігури

I. Площа криволінійної трапеції, обмеженої неперервною функцією $y=f(x)$, двома прямими $x=a$ і $x=b$ та відрізком $a\le x\le b$ осі абсцис, обчислюється за допомогою наступних формул:

якщо $\forall x\in[a,\ b]$ $f(x)\ge 0$, то

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx}; \qquad (2.12)$$

якщо $\forall x\in[a,\ b]$ $f(x)\le 0$, то

$$\boxed{S=-\int_a^b f(x)\,dx=-\int_a^b y\,dx};\tag{2.13}$$

якщо функція $y=f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ змінює знак , то

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)|\,dx}.\tag{2.14}$$

Якщо плоска фігура обмежена двома неперервними лініями $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$ і двома прямими $x=a$, $x=b$, а також $\forall x\in[a,\ b]$ виконується умова $f_1(x)\geq f_2(x)$, то площа цієї фігури обчислюється за формулою

$$\boxed{S=\int_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx}.\tag{2.15}$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=2x-x^2$, $x+y=0$.
Знайдемо точки перетину заданих ліній

$$\begin{cases} y=2x-x^2 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow\ 2x-x^2=-x\ \Rightarrow\ 3x-x^2=0\ \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-3 \end{cases}$$

За формулою (2.15) маємо

$$S=\int_0^3\left(2x-x^2+x\right)dx=\int_0^3\left(3x-x^2\right)dx=\left(3\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{3}{2}\cdot 9-9=\frac{9}{2}\ (кв.од.).$$

ІІ. Якщо криву, що обмежує криволінійну трапецію, задано параметрично: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in\left[t_1,\ t_2\right]$, то

$$\boxed{S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'_t(t)\,dt}.\tag{2.16}$$

Приклад. Знайти площу еліпса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.
Фігура симетрична відносно осей Ox та Oy, тому

$$S = 4\int\limits_{\pi/2}^{0} b\cdot\sin t\cdot a(-\sin t)dt = -4ab\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 tdt = -4ab\int\limits_{\pi/2}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) = \pi ab\ \left(\text{кв.од.}\right).$$

III. Обчислення площі в полярних координатах

Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і двома радіусами-векторами $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta\ (\alpha < \beta)$, обчислюється за формулою

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\rho(\varphi)\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi}. \tag{2.17}$$

Приклад. Обчислити площу кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int\limits_{0}^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\pi + 0 + \frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{3\pi}{2}a^2\ \left(\text{кв.од.}\right).$$

Обчислення довжини дуги

І. Довжина дуги гладкої кривої, заданої функцією $y = f(x),\ x\in[a,\ b]$, визначається за формулою

$$\boxed{l = \int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}. \tag{2.18}$$

Приклад. Знайти довжину дуги частини кривої $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin\sqrt{x}$ від точки $x = \frac{1}{4}$ до точки $x = \frac{3}{4}$.

Для обчислення довжини дуги використаємо формулу (2.18).

Знайдемо спочатку $y' = f'(x)$:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\cdot(1-2x) + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}};$$

$$1+(y')^2=1+\frac{(1-x)^2}{x-x^2}=1+\frac{1-2x+x^2}{x-x^2}=\frac{x-x^2+1-2x+x^2}{x-x^2}=\frac{1-x}{x(1-x)}=\frac{1}{x};$$

$$l=\int_{1/4}^{3/4}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_{1/4}^{3/4}=2\sqrt{\frac{3}{4}}-2\sqrt{\frac{1}{4}}=\sqrt{3}-1\ (\textit{лін.од.}).$$

II. Якщо крива задана параметричними рівняннями: $x=x(t),\ y=y(t)$, $t\in[t_1,\ t_2]$, то довжина її дуги

$$\boxed{l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'(t)\right)^2+\left(y_t'(t)\right)^2}dt}. \tag{2.19}$$

Приклад. Знайти довжину кола: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$.

$$x_t'=r\cdot(-\sin t),\qquad y_t'=r\cos t;$$

$$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t=r^2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)=r^2;$$

$$l=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2}dt=4r\cdot t\Big|_0^{\pi/2}=4r\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi r\ \ (\textit{лін.од.})..$$

III. Якщо крива задана рівнянням в полярних координатах: $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\ \beta]$, то довжина дуги

$$\boxed{l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}\,d\varphi}. \tag{2.20}$$

Приклад. Обчислити довжину кривої $\rho=a\sin\varphi$.
Оскільки $\rho\ge 0$, $\varphi\in[0;\ \pi]$; $\rho_\varphi'=a\cos\varphi$.

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{(a\sin\varphi)^2+(a\cos\varphi)^2}d\varphi=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)}d\varphi==a\int_0^{\pi}d\varphi=a\cdot\varphi\Big|_0^{\pi}=a\pi.$$

Обчислення об’єму тіла

Якщо відомі площі S перерізів тіла площинами, перпендикулярними до осі, наприклад, Ox: $S=S(x)$, $x\in[a,\ b]$, тоді об’єм тіла обчислюється за формулою

$$\boxed{V=\int\limits_a^b S(x)dx}. \qquad (2.21)$$

Об’єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі Ox, якщо вона обмежена неперервною лінією $y=f(x)$, $x\in[a,\ b]$, віссю Ox і прямими $x=a$ та $x=b$, $a<b$, обчислюється за формулою

$$\boxed{V_{Ox}=\pi\int\limits_a^b \left(f(x)\right)^2 dx=\pi\int\limits_a^b y^2dx}. \qquad (2.22)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена неперервною лінією $x=\varphi(y)$, $y\in[c,\ d]$, віссю Oy, то об’єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$\boxed{V_{Oy}=\pi\int\limits_c^d \left(\varphi(y)\right)^2 dy=\pi\int\limits_c^d x^2dy}. \qquad (2.23)$$

Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривими $y=f_1(x),\ y=f_2(x)$ $\left(0\le f_1(x)\le f_2(x)\right)$ та прямими $x=a,\ x=b$ $(a<b)$, обчислюється за формулою

$$\boxed{V_{Ox}=\pi\int\limits_a^b \left[\left(f_2(x)\right)^2-\left(f_1(x)\right)^2\right]dx}. \qquad (2.24)$$

Приклад. Обчислити об’єм тіла обертання кривої $y=\sin x$ на проміжку $x\in[0,\ \pi]$ навколо осі Ox.

За формулою (2.22) маємо:

$$V_{Ox}=\pi\int\limits_a^b (\sin x)^2 dx=\pi\int\limits_a^b \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}(\pi-0)=\frac{\pi^2}{2}(\textit{куб.од.}).$$

§2. ТИПОВІ ЗАДАЧІ З РОЗВ'ЯЗАННЯМ

2.1. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Формула Ньютона-Лейбніца

Приклади. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int_0^1 e^x dx; \qquad 2)\ \int_1^2 \left(1+5x^4\right)dx; \qquad 3)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$4)\ \int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx; \qquad 5)\ \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}; \qquad 6)\ \int_1^e \frac{\ln x - 1}{x}dx.$$

Розв'язання.

1) Для функції $f(x)=e^x$ однією із первісних функцій буде функція $F(x)=e^x$. За формулою (2.3) одержимо

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - e^0 = e - 1.$$

2) Враховуючи властивості визначеного інтеграла і формулу (2.3), одержимо

$$\int_1^2 \left(1+5x^4\right)dx = \int_1^2 dx + 5\int_1^2 x^4 dx = x\Big|_1^2 + 5\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = x\Big|_1^2 + x^5\Big|_1^2 = (2-1)+\left(2^5-1\right)=$$

$$=1+32-1=32.$$

$$3)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = arc\sin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = arc\sin\frac{1}{2} - arc\sin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$4)\ \int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = -2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -2(0-1) = 2.$$

$$5)\ \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$$

$$6)\ \int_1^e \frac{\ln x - 1}{x}dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx - \int_1^e \frac{dx}{x} = \int_1^e \ln x\, d\ln x - \int_1^e \frac{dx}{x} = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e - \ln x\Big|_1^e =$$

$$= \frac{1}{2} - 0 - (1-0) = -\frac{1}{2}.$$

Метод підстановки (заміни змінної)

та метод інтегрування частинами

Приклади. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int_2^7 \frac{xdx}{\sqrt{x+2}};\qquad 2)\ \int_{-1}^6 \sqrt[3]{4x+3}\,dx;$$

$$3)\ \int_0^{\sqrt5} \sqrt{5-x^2}\,dx;\quad 4)\ \int_0^{\pi/6}(2-x)\sin 3x dx;\quad 5)\ \int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x dx;\quad 6)\ \int_{\pi/2}^{\pi} x\cos x dx.$$

Розв'язання.

1) Застосуємо метод заміни змінної та змінимо межі інтегрування. Одержимо

$$\int_2^7 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}} = \left| \begin{array}{lll} \sqrt{x+2}=t, & x=t^2-2, & t_1=\sqrt{2+2}=2 \\ x+2=t^2, & dx=2tdt, & t_2=\sqrt{7+2}=3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{\left(t^2-2\right)\cdot 2t}{t}dt =$$

$$=2\int_2^3\left(t^2-2\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(\frac{3^3}{3}-2\cdot3-\frac{2^3}{3}+2\cdot2\right) = 2\left(9-6-\frac{8}{3}+4\right)=\frac{26}{3}.$$

2) За методом підстановки (заміни змінної)

$$\int_{-1}^6 \sqrt[3]{4x+3}\,dx = \left| \begin{array}{lll} \sqrt[3]{4x+3}=t, & 4x=t^3-3, & t_1=\sqrt[3]{-1}=-1 \\ x=\frac{1}{4}\left(t^3-3\right), & dx=\frac{3}{4}t^2dt, & t_2=\sqrt[3]{27}=3 \end{array} \right| = \int_{-1}^3 t\cdot\frac{3}{4}t^2dt = \frac{3}{4}\int_{-1}^3 t^3dt =$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{t^4}{4}\Bigg|_{-1}^3 = \frac{3}{16}\left(3^4-(-1)^4\right)=\frac{3}{16}(81-1)=\frac{3\cdot80}{16}=15.$$

3) Застосуємо тригонометричну підстановку і одержимо

$$\int_0^{\sqrt5}\sqrt{5-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{lll} x=\sqrt5\sin t, & 0=\sqrt5\sin t, & \sin t=0 \Rightarrow t_н=0 \\ dx=\sqrt5\cos t\,dt, & \sqrt5=\sqrt5\sin t, & \sin t=1 \Rightarrow t_в=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{5-5\sin^2 t}\cdot\sqrt5\cos t dt = 5\int_0^{\pi/2}\cos t\cdot\cos t dt = 5\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = 5\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{5}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin 0\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-0\right)=\frac{5\pi}{4}.$$

4) Для обчислення інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами

$$\int_0^{\pi/6}(2-x)\sin 3x dx=\left|\begin{array}{l} u=2-x,\ du=-dx \\ dv=\sin 3x dx,\ v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right|=-\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x\Bigg|_0^{\pi/6}-$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/6}\cos 3x dx=-\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x\Bigg|_0^{\pi/6}-\frac{1}{9}\sin 3x\Bigg|_0^{\pi/6}=-\frac{1}{3}\left(2-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{2}+$$

$$+\frac{1}{3}(2-0)\cos 0-\frac{1}{9}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}.$$

5) Застосуємо формулу інтегрування частинами (2.5)

$$\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=\sqrt{x}dx, & v=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} \end{array}\right|=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x\Bigg|_1^{e^2}-\frac{2}{3}\int_1^{e^2}\frac{x\sqrt{x}}{x}dx=$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x\Bigg|_1^{e^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Bigg|_1^{e^2}=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{9}x\sqrt{x}\right)\Bigg|_1^{e^2}=\frac{2}{3}e^2\sqrt{e^2}\ln e^2-\frac{4}{9}e^2\sqrt{e^2}-$$

$$-\frac{2}{3}\ln 1+\frac{4}{9}=\frac{4}{3}e^3-\frac{4}{9}e^3+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}e^3+\frac{4}{9}=\frac{4}{9}\left(2e^3+1\right).$$

6) Застосуємо формулу інтегрування частинами (2.5)

$$\int_{\pi/2}^{\pi}x\cos x dx=\left|\begin{array}{ll} u=x, & du=dx \\ dv=\cos x dx, & v=\sin x \end{array}\right|=x\sin x\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin x dx=$$

$$=\left(x\sin x+\cos x\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=\pi\sin\pi+\cos\pi-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=-1-\frac{\pi}{2}=-\frac{2+\pi}{2}.$$

2.2. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Приклади. Дослідити збіжність інтегралів:

$$1)\ \int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^5};\qquad 2)\ \int_{-\infty}^{0}e^{-x}dx;\qquad 3)\ \int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}};\qquad 4)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1};$$

$$5)\ \int_{0}^{3}\frac{dx}{x^2};\qquad 6)\ \int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}};\qquad 7)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}.$$

Розв'язання.

1) Застосуємо формулу (2.6)

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^5}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}x^{-5}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-4}}{-4}\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{4x^4}\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{4b^4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

Невласний інтеграл збіжний.

2) Застосуємо формулу (2.7)

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-x}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}e^{-x}dx=\lim_{a\to-\infty}\left(-e^{-x}\Bigg|_a^0\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(-e^{0}+e^{-a}\right)=-1+e^{+\infty}=$$

$$=-1+\infty=\infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний.

3) Застосуємо формулу (2.6)

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}x^{-1/4}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{4x^{3/4}}{3}\Bigg|_1^b\right)=\frac{4}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^3}\Bigg|_1^b\right)=\frac{4}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[4]{b^3}-1\right)=$$

$$=\frac{4}{3}(+\infty-1)=+\infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний.

4) Застосуємо формулу (2.8) і будемо вважати, що $c=0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\left(arctgx\Bigg|_a^0\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(arctgx\Bigg|_0^b\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(arctg0-arctga)+\lim_{b\to+\infty}(arctgb-arctg0)=-arctg(-\infty)+arctg(+\infty)=$$

$$=2arctg(\infty)=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Невласний інтеграл збіжний.

5) Функція $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ має розрив у точці $x=0$.

Застосуємо формулу (2.10)

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{3} x^{-2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{3}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{3}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{0+\varepsilon}\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}+\infty=\infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний.

6) Функція $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-4}}$ має розрив у точці $x=4$.

Застосуємо формулу (2.11)

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{4-\varepsilon}(x-4)^{-\frac{1}{3}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3\cdot(x-4)^{\frac{2}{3}}}{2}\Bigg|_1^{4-\varepsilon}\right)=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{(x-4)^2}\Bigg|_1^{4-\varepsilon}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{(4-\varepsilon-4)^2}-\sqrt[3]{9}\right)=\frac{3}{2}\left(0-\sqrt[3]{9}\right)=-\frac{3\sqrt[3]{9}}{2}.$$

Невласний інтеграл збіжний.

7) Функція $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ має розрив у точці $x=0$.

Застосуємо формулу (2.9)

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}x^{-3/5}dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}x^{-3/5}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{5x^{2/5}}{2}\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{5x^{2/5}}{2}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{1}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[5]{x^2}\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon}\right)+\frac{5}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[5]{x^2}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{1}\right)=\frac{5}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[5]{(0-\varepsilon)^2}-1\right)+$$

$$+\frac{5}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\sqrt[5]{(0+\varepsilon)^2}\right)=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=0.$$

Невласний інтеграл збіжний.

<u>Приклади.</u> Дослідити збіжність інтегралів:

$$1)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}\ \text{при}\ \alpha>0; \qquad 2)\ \int_a^b\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}\ \text{при}\ \alpha>0.$$

Розв'язання.

1) Дослідимо збіжність даного невласного інтеграла для різних значень α.

При $\alpha=1$ одержимо

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln x\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)= =\infty-0=\infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний.

При $\alpha>1$ одержимо

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_1^b\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)\right)=-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}.$$

Невласний інтеграл збіжний.

При $0<\alpha<1$ одержимо

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b\right)=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-\alpha}-1\right)=\frac{1}{1-\alpha}(\infty-1)=\infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний.

Висновок. Невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ при $\alpha>1$ збіжний, а при $\alpha\le 1$ розбіжний.

2) Функція $f(x)=\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}$ в точці $x=b$ має розрив. Тому інтеграл $\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ є невласним інтегралом II року.

Дослідимо збіжність цього інтеграла для довільних значень α.

При $\alpha=1$ одержимо

$$\int_a^b\frac{dx}{b-x}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{b-x}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\ln|b-x|\Big|_a^{b-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln|b-x|\Big|_{b-\varepsilon}^{a}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|b-a|-\ln|b-b+\varepsilon|\right)=\ln|b-a|-\infty=\infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний.

При $\alpha>1$ одержимо

$$\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}(b-x)^{-\alpha}dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_a^{b-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}}\Bigg|_a^{b-\varepsilon}\right)\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(b-b+\varepsilon)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right)\right)=\frac{1}{\alpha-1}\left(\infty-\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right)=\infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний.

При $0<\alpha<1$ одержимо

$$\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}(b-x)^{-\alpha}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_a^{b-\varepsilon}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\left((b-x)^{1-\alpha}\Bigg|_a^{b-\varepsilon}\right)=-\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\left((b-b+\varepsilon)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha-1}(b-a)^{1-\alpha}=\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Невласний інтеграл збіжний.

<u>*Висновок.*</u> Невласний інтеграл $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ $\nearrow$ *збіжний*, якщо $\alpha<1$, $\searrow$ *розбіжний*, якщо $\alpha\geq 1$.

<u>Приклади.</u> Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$; 2) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}dx$; 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+4}$; 4) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x dx}{(1-x)^2}$.

<u>*Розв'язання.*</u>

1) Розглянемо дві функції $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^5+1}}$ і $\varphi(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^5}}=\dfrac{1}{x^{3/2}}$.

При $x \geq 1$ для даних функцій виконується нерівність $\dfrac{x}{\sqrt{x^5+1}} < \dfrac{1}{x^{3/2}}$,

а невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{3/2}}$ - збіжний при $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$.

Тоді збіжним є і невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$.

2) Розглянемо дві функції $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ і $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$.

При $x \geq 2$ $\ln(x^2+1) > 1$ і має місце нерівність $\dfrac{\ln(x^2+1)}{x} > \dfrac{1}{x}$.

Невласний інтеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ при $\alpha = 1$ розбіжний, тоді буде розбіжним і невласний інтеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} dx$.

3) В даному випадку при $x \geq 1$ виконується нерівність $\dfrac{1}{x^3+4} < \dfrac{1}{x^3}$,

і невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3}$ збіжний при $\alpha = 3 > 1$.

Тоді збіжним буде і невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3+4}$.

4) Функція $f(x) = \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$ має в точці $x = 1$ розрив.

При $0 \leq x < 1$ має місце нерівність $\dfrac{e^x}{(1-x)^2} \geq \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Невласний інтеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1-x)^2}$ розбіжний при $\alpha = 2 > 1$, отже буде розбіжним і невласний інтеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{e^x}{(1-x)^2} dx$.

2.3. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

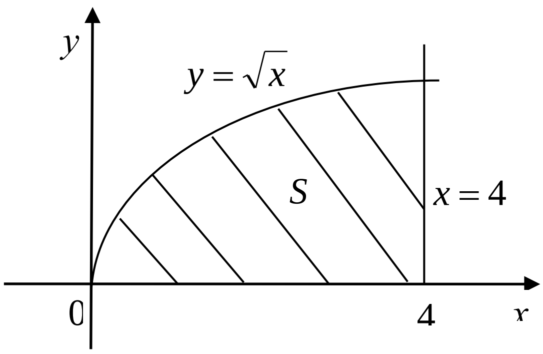
Обчислення площі фігури в декартових та полярних координатах

Приклади. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1) $y=\sqrt{x}$ – вітка параболи, прямою $x=4$ та віссю *OX*;
2) параболою $y=x^2-3$ та віссю *OX*;
3) косинусоїдою $y=\cos x$, осями координат та прямою $x=\pi$;
4) $y=x^3$, $y=e^x$, прямою $x=-2$ та віссю *OУ*;
5) параболою $y=x^2-2$ та прямою $y=x$;
6) кардіоїдою $\rho=a\left(2+\cos\varphi\right)$.

Розв'язання.

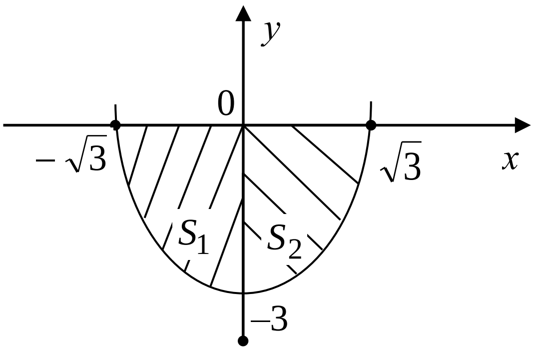
1) Зробимо схематичний рисунок фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$ – вітка параболи, прямою $x=4$ та віссю *OX*.



Для обчислення площі цієї фігури застосуємо формулу (2.12), оскільки $\forall x\in[0,\ 4]$ $\sqrt{x}>0$.

$$S=\int_0^4\sqrt{x}dx=\int_0^4 x^{1/2}dx=\frac{2x^{3/2}}{3}\Bigg|_0^4=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Bigg|_0^4=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3}-0\right)=\frac{16}{3}(кв.од.).$$

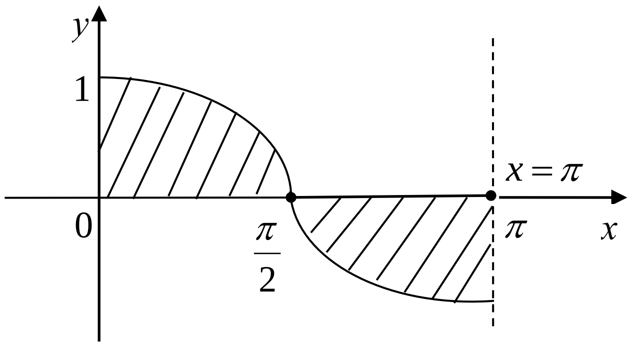
2) Зробимо схематичний рисунок фігури, обмеженої параболою $y=x^2-3$ та віссю *OX*.



Функція $y=x^2-3<0$ $\forall x\in\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$. Для обчислення площі даної фігури застосуємо формулу (2.13) і, враховуючи симетричність фігури $\left(S_1=S_2\right)$,одержимо

$$S = 2S_2 = -\int_0^{\sqrt{3}} \left(x^2 - 3\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \textit{(кв. од.)}$$

3) Побудуємо схематично фігуру, обмежену лініями $y = \cos x,\ \ x = 0,\ y = 0$ та $x = \pi$.



Функція $y = \cos x$ змінює своє значення на відрізку $[0;\pi]$, тобто

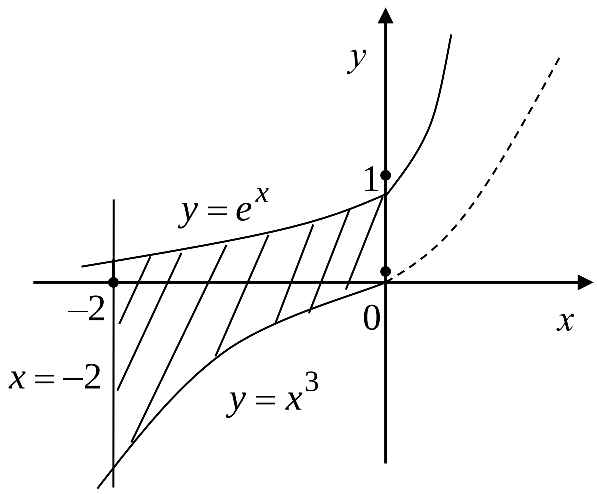
$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ -\cos x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$$

Для обчислення площі даної фігури застосуємо формулу (2.14)

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx =$$

$$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2(\textit{кв.од.}).$$

4) Зробимо схематичний рисунок фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = e^x$, $x = -2$ та $x = 0$.



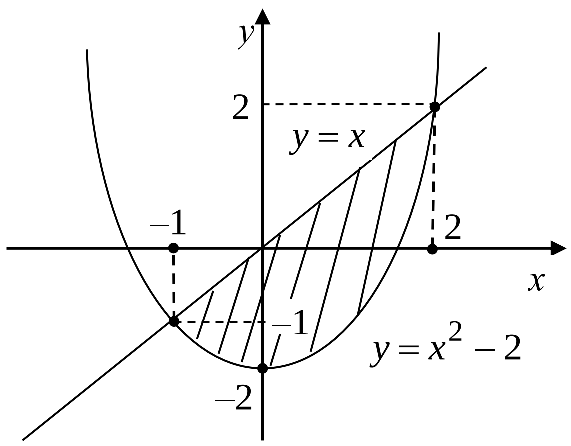
Площу даної фігури обчислимо за формулою (2.15).

Для всіх $x \in [-2; 0]$ виконується умова $e^x > x^3$. Одержимо

$$S=\int_{-2}^{0}\left(e^x-x^3\right)dx=\int_{-2}^{0}e^x dx-\int_{-2}^{0}x^3dx=e^x\Big|_{-2}^{0}-\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}=e^0-e^{-2}-0+\frac{(-2)^4}{4}=$$

$$=1-\frac{1}{e^2}+4=5-\frac{1}{e^2}\ (кв.од.).$$

5) Зробимо схематичний рисунок фігури, обмеженої лініями $y=x^2-2$ та $y=x$. Для всіх $x\in[-1;\,2]$ виконується умова $x>x^2-2$.
Для обчислення площі фігури застосуємо формулу (2.15).



Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2-2 \end{cases} \Rightarrow\ x=x^2-2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2-x-2=0$$

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=-1 \end{cases},\qquad \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=2 \end{cases}$$

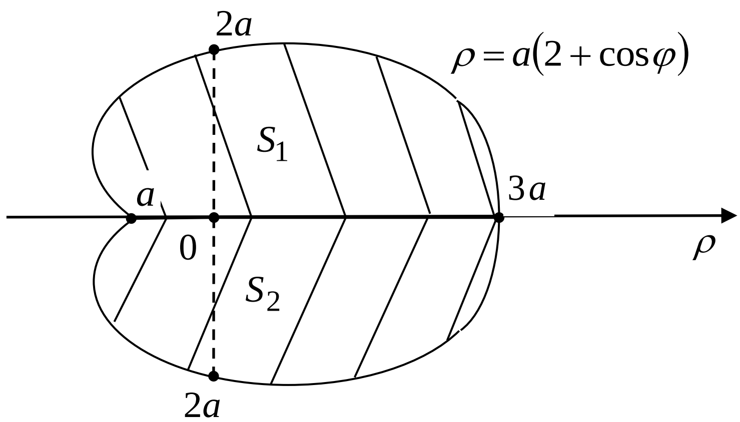
$$S=\int_{-1}^{2}\left(x-x^2+2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}+2\cdot 2\right)-$$

$$-\left(\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+2\cdot(-1)\right)=\left(2-\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right)=\frac{10}{3}+\frac{7}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}\ (кв.од.).$$

6) Кардіоїду $\rho=a(2+\cos\varphi)$ в полярній системі координат побудуємо по точках. Складемо таблицю:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	$3a$	$2a$	a	$2a$	$3a$

$$S_1=S_2\ \Rightarrow\ S=2S_1,$$
$$0\le\varphi\le\pi$$



Для обчислення площі застосуємо формулу (2.17).

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2\left(2+\cos\varphi\right)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(4+4\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(4+4\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(4+4\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{9}{2}+4\cos\varphi+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\left(\frac{9}{2}\varphi+4\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= a^2\left(\frac{9\pi}{2}+4\sin\pi+\frac{1}{4}\sin 2\pi-4\sin 0-\frac{1}{4}\sin 0\right) = a^2\cdot\frac{9\pi}{2} = \frac{9\pi a^2}{2}\ \left(\textit{кв.од.}\right).$$

Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Приклади. Знайти

---

1) довжину частини дуги кривої $y = 1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le\frac{3}{4}$;

2) довжину дуги кривої $y=\ln x$ від $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$;

2) довжину однієї арки циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in\left[0,2\pi\right]$;

3) довжину дуги кардіоїди $\rho = 1+\cos\varphi$.

Розв'язання.

1) Скористаємось формулою (2.18), згідно якої $l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$.

$$y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Знайдене $y' = f'(x)$ підставимо у формулу і держимо

$$l=\int\limits_0^{3/4}\sqrt{1+\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\limits_0^{3/4}\sqrt{\frac{1-x+1+x}{1-x}}dx=\int\limits_0^{3/4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}dx=\sqrt{2}\int\limits_0^{3/4}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=$$

$$=-2\sqrt{2}\left(\left.\sqrt{1-x}\right|_0^{3/4}\right)=-2\sqrt{2}\left(\sqrt{1-\frac{3}{4}}-1\right)=-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\sqrt{2}\ \left(\textit{лін.од.}\right).$$

2) Для обчислення довжини дуги кривої $y=\ln x$ від $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$, застосуємо формулу (2.18). Знайдемо похідну $y'=\dfrac{1}{x}$, тоді

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Довжина l дорівнює

$$l=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\left|\begin{matrix} t^2=x^2+1 & dx=\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}, & t_1=2 \\ x=\sqrt{t^2-1}, & & t_2=3\end{matrix}\right|=\int\limits_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=$$

$$=\int\limits_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left.\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\right|_2^3=3-2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\ \left(\textit{лін.од.}\right).$$

3) Довжину однієї арки циклоїди $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\ t\in[0,2\pi]$ знайдемо за формулою (2.19): $l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'(t)\right)^2+\left(y_t'(t)\right)^2}dt$.

Знайдемо $x'(t)$ та $y'(t)$: $\quad x'(t)=a(1-cost),\quad y'(t)=a\sin t$,

$$x'^2+y'^2=a^2\left(1-\cos t\right)^2+a^2\sin^2 t=a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)=$$

$$=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Тоді

$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}dt}=\int\limits_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=2a(-2\cos\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=$$

$$=-4a\left(-1-1\right)=8a\ \left(\textit{лін.од.}\right).$$

4) Застосуємо формулу довжини дуги кривої у полярних координатах (2.20)

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi.$$

Знаходимо ρ': $\rho' = -\sin\varphi$.

Використавши властивість симетричності кардіоїди відносно полярної осі $\left(0 \le \varphi \le \pi\right)$, будемо мати

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\left(1+\cos\varphi\right)^2 + (-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{1+2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2\left(1+\cos\varphi\right)}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 8\sin\frac{\pi}{2} - 8\sin 0 = 8 \ \left(\textit{лін.од.}\right).$$

<u>Обчислення об’єму тіла обертання</u>

<u>Приклади.</u> Обчислити об’єм тіла обертання

- навколо осі *OX*, криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y = \frac{2}{x},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 6;$

2) $y^2 = x,\ y = 0,\ x = 9;$

3) $y = x,\ y = 3x$ і $x = 2.$

- навколо осі *OY*, криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

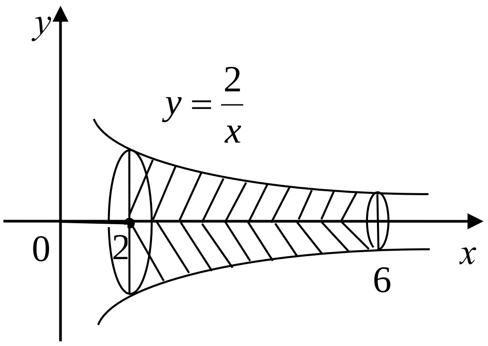
4) $y = 2x^2,\ y = 8,\ x = 0;$

5) $x = \sqrt{2y},\ x = 2\sqrt{y},\ y = 9,\ x = 0;$

6) $y = x^3,\ x = 0,\ y = 8.$

<u>*Розв’язання.*</u>

1) Побудуємо схематичний рисунок і, для обчислення об’єму тіла обертання навколо осі *OX* фігури, обмеженої лініями $y = \frac{2}{x},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 6$, застосуємо формулу (2.22).



$$V=\pi\int_2^6\left(\frac{2}{x}\right)^2dx=4\pi\int_2^6\frac{dx}{x^2}=$$

$$=4\pi\int_2^6 x^{-2}dx=4\pi\left(\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_2^6\right)=$$

$$=-4\pi\left(\left.\frac{1}{x}\right|_2^6\right)=-4\pi\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)=$$

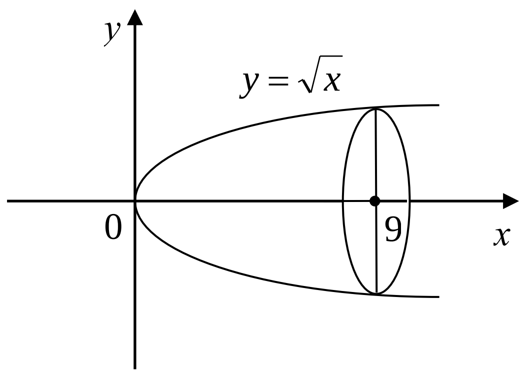
$$=4\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{4\pi}{3}\ (куб.од.).$$

2) Зробимо схематичний рисунок фігури, обмеженої лініями $y^2=x,\ y=0,\ x=9$, яка обертається навколо осі OX.

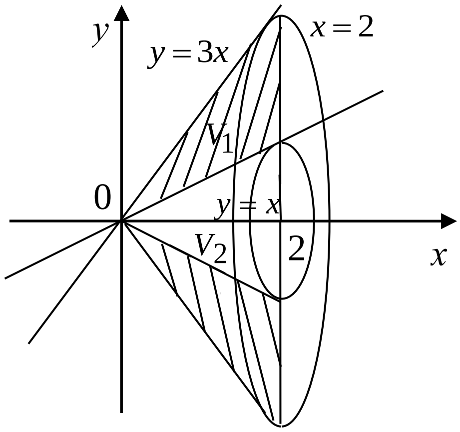
Обчислення за формулою (2.22) дають

$$V=\pi\int_0^9 y^2dx=\pi\int_0^9 xdx=$$

$$=\pi\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^9=\frac{81\pi}{2}\ (куб.од.)$$



3) Зробимо схематичний рисунок фігури, обмеженої лініями $y=x,\ y=3x$ і $x=2$, яка обертається навколо осі OX. За формулою (2.22), будемо мати



$$V = V_1 - V_2 =$$

$$= \pi \int_0^2 (3x)^2 \, dx - \pi \int_0^2 x^2 dx =$$

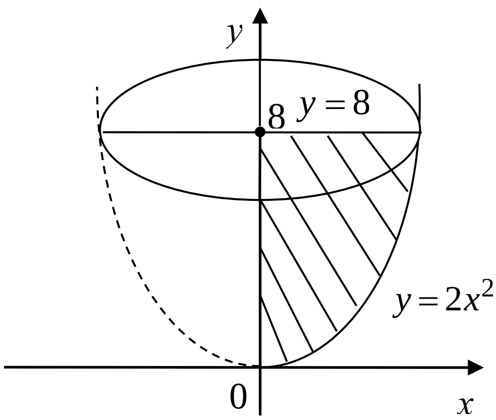
$$= \pi \int_0^2 \left(9x^2 - x^2\right) dx = \pi \int_0^2 8x^2 \, dx =$$

$$= 8\pi \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = 8\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{64\pi}{3} \left(куб.од.\right).$$

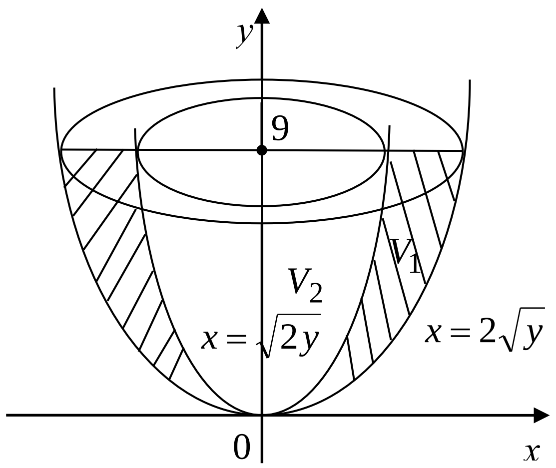
4) Зробимо схематичний рисунок фігури, обмеженої лініями $y = 2x^2,\ y = 8,\ x = 0$, яка обертається навколо осі OY.
Для обчислення об’єму тіла застосуємо формулу (2.23)

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_0^8 \frac{y}{2} dy = \frac{\pi}{2} \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^8 =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot 8^2 = \frac{64\pi}{4} = 16\pi \ \left(куб.од.\right).$$



5) Зробимо схематичний рисунок фігури, обмеженої лініями $x = \sqrt{2y},\ x = 2\sqrt{y},\ y = 9,\ x = 0$, яка обертається навколо осі OY.
Використовуючи формулу (2.23), знайдемо



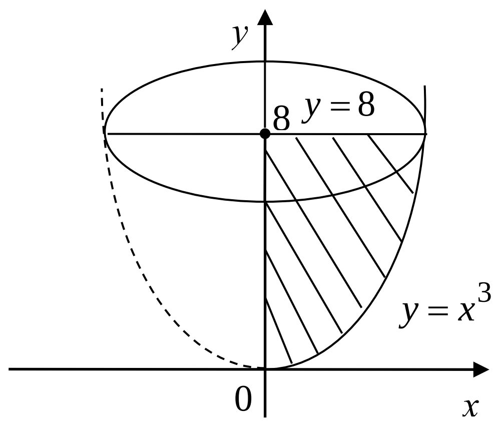
$$V=V_1-V_2=$$
$$=\pi\int_0^9\left(2\sqrt{y}\right)^2dy-\pi\int_0^9\left(\sqrt{2y}\right)^2dy=$$
$$=\pi\int_0^9\left(4y-2y\right)dy=\pi\int_0^9 2y\,dy=$$
$$=2\pi\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^9=81\pi\ \left(куб.од.\right).$$

6) Зробимо схематичний рисунок фігури, обмеженої лініями $y=x^3,\ x=0,\ y=8$, яка обертається навколо осі OY.

Функцію $y=x^3$ запишемо у вигляді $x=\sqrt[3]{y}$.

За формулою (2.23) маємо

$$V=\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_0^8\left(\sqrt[3]{y}\right)^2dy=\pi\int_0^8 y^{2/3}dy=$$
$$=\pi\cdot\frac{3y^{5/3}}{5}\Big|_0^8=\frac{3\pi}{5}\sqrt[3]{y^5}\Big|_0^8=\frac{3\pi}{5}\left(y\sqrt[3]{y^2}\Big|_0^8\right)=$$
$$=\frac{3\pi}{5}\cdot 8\sqrt[3]{64}=\frac{3\pi}{5}\cdot 8\cdot 4=\frac{96\pi}{5}\ \left(куб.од.\right)$$



§3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

3.1. МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

В задачах **344 – 379** обчислити інтеграли.

344. $\int_1^4\sqrt{x}dx.$ 345. $\int_1^2\left(x^3+\frac{1}{x^5}\right)dx.$ 346. $\int_0^2 e^{x/2}dx.$

347. $\int_0^{\pi/4}\sin 4x dx.$ 348. $\int_1^3\left(\frac{1}{3}x^2-2x+4\right)dx.$ 349. $\int_1^3\frac{dx}{x^4}.$

350. $\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 xdx.$ 351. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{2x+5}.$ 352. $\int_{1}^{2} \frac{xdx}{3x^2+4}.$

353. $\int_{\pi/2}^{\pi} ctg\frac{x}{2}dx.$ 354. $\int_{0}^{\pi/8} tg2xdx.$356. 355. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}.$

356. $\int_{6}^{9} \frac{dx}{x^2-5}.$ 357. $\int_{0}^{\sqrt{7}} \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}.$ 358. $\int_{-1}^{1} \left(3x^2+2x-5\right)dx.$

359. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 3x \cos 5xdx.$ 360. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-2x+3}.$ 361. $\int_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}+3}.$

362. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{4+\sqrt{2x+1}}.$ 363. $\int_{1}^{6} \frac{xdx}{\sqrt{3+x}}.$ 364. $\int_{5}^{12} \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx.$

365. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{9x+7}}.$ 366. $\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+5}.$ 367. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{8+\sqrt{x+1}}.$

368. $\int_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{\left(2-x^2\right)^3}dx.$ 369. $\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}.$ 370. $\int_{4}^{5} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}.$

371. $\int_{\sqrt{6}/2}^{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6-x^2}}{x^2}dx.$ 372. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}.$ 373. $\int_{1}^{3} xe^{2x}dx.$

374. $\int_{0}^{\pi/2} (x+3)\cos xdx.$ 375. $\int_{0}^{\pi/4} x^2 \sin 2xdx.$ 376. $\int_{0}^{2} \ln(x+2)dx.$

377. $\int_{0}^{1} arctgxdx.$ 378. $\int_{-1}^{0} (3x+2)e^{-2x}dx.$ 379. $\int_{1}^{e} x^2 \ln xdx.$

<u>3.2. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ</u>

В задачах **380 – 403** обчислити невласні інтеграли (або встановити їх розбіжність).

380. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^6}$.
381. $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^3}$.
382. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.
383. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.
384. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$.
385. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+3}$.
386. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+16}$.
387. $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.
388. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{4x+5}$.
389. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+9}$.
390. $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$
391. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{3x+2}$.
392. $\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$.
393. $\int\limits_{-\infty}^{0}x^2e^{-x^3}dx$.
394. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x}$.
395. $\int\limits_{-3}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.
396. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.
397. $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt[5]{x+2}}$.
398. $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+2)^3}$.
399. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(x-1)^2}$.
400. $\int\limits_{-5}^{-2}\frac{dx}{(x+5)^3}$.
401. $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3}}$.
402. $\int\limits_{0}^{1/3}\frac{dx}{x\ln^3 x}$.
403. $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

В задачах **404 – 415**, використовуючи ознаки порівняння, дослідити збіжність невласних інтегралів.

404. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-2}}$.
405. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$.
406. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^4}dx$.
407. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^3}dx$.
408. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.
409. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^6-1}}$.
410. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^5}}dx$.
411. $\int\limits_{1}^{5}\frac{2^x dx}{(x-5)^4}$.
412. $\int\limits_{1}^{2}\frac{10^x}{(x-2)^3}dx$.
413. $\int\limits_{0}^{2}\frac{3+\cos x}{(x-2)^3}dx$.
414. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.
415. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(1-x^2)^7}}$.

3.3. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

В задачах **416 – 452** обчислити площі плоских фігур в декартових та полярних координатах.

416. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = 9x$ і прямою $y = 3x$.

417. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = -x$.

418. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = x^3$, прямою $x = 3$ і віссю OX.

419. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = x^3$, прямою $y = 8$ і віссю OY.

420. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y^2 = 4x$ і $y^2 = 16x$ та прямою $x = 2$.

421. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y^2 = 8x$ і $x^2 = y$.

422. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 6$ і прямою $y = x$.

423. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $xy = 4$, прямими $x = 1$, $x = 4$ та віссю OX.

424. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $xy = 2$, прямими $y = \frac{1}{2}x$ і $x = 5$.

425. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $xy = 4$, $y = x$, $x = 6$.

426. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ і прямою $x = 3$.

427. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = e^x$, осями координат і прямою $x = 4$.

428. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = e^{2x}$, осями координат і прямою $x = -2$.

429. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = e^{-x/2}$, осями координат і прямою $x = 4$.

430. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = e^{-\frac{x}{3}}$, осями координат і прямою $x = -3$.

431. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = tgx,$ віссю OX і прямою $x = \frac{\pi}{3}.$

432. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = tg\,2x,$ віссю OX і прямою $x = -\frac{\pi}{8}.$

433. Обчислити площу фігури, обмеженої прямими лініями $y = 2x,\ x = 1,\ x = 4$ і віссю $OX.$

434. Обчислити площу фігури, обмеженої прямими лініями $y = -3x,\ x = -5,\ x = -2$ і віссю $OX.$

435. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 5x - x^2$, прямими $x = -1,\ \ x = 2$ та віссю $OX.$

436. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right),$ прямими $x = -1,\ x = 2$ та віссю $OX.$

437. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y = 3x^2$ і $y = x^3.$

438. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = \frac{2}{1 + x^2}.$

439. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $xy = 6$ і прямою $x + y - 7 = 0.$

440. Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою $\rho^2 = 4\cos 2\varphi.$

441. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = 2(1 - \cos\varphi).$

442. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = 3(1 - \sin\varphi).$

443. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = 4(1 + \cos\varphi).$

444. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = 2(1 + \sin\varphi).$

445. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = 4(2 - \cos\varphi).$

446. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = 3(2 + \cos\varphi).$

447. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a(3 - \sin\varphi).$

448. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a(3 + \sin\varphi).$

449. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = 2\cos\varphi$.

450. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = 3\sin\varphi$.

451. Обчислити площу однієї петлі лінії $\rho = a\sin 2\varphi$.

452. Обчислити площу однієї петлі лінії $\rho = a\cos 2\varphi$.

В задачах **453 – 469** обчислити об'єм тіла обертання.

453. Фігура, обмежена прямими $y = 2x,\ x = 5$ і $y = 0$ обертається навколо осі *OX*. Знайти об'єм тіла обертання.

454. Фігура, обмежена прямими $y = 3x,\ y = 4$ і $x = 0$ обертається навколо осі *OУ*. Знайти об'єм тіла обертання.

455. Фігура, обмежена параболою $y^2 = 4x$ і прямою $x = 4,$ обертається навколо осі *OX*. Знайти об'єм тіла обертання.

456. Фігура, обмежена параболою $y^2 = 3x$ і прямими $y = 4,\ x = 0,$ обертається навколо осі *OУ*. Знайти об'єм тіла обертання.

457. Фігура, обмежена однією дугою синусоїди $y = \sin x$ і віссю *OX*, обертається навколо осі *OX*. Знайти об'єм тіла обертання.

458. Фігура, обмежена однією дугою синусоїди $y = \sin 2x$ і віссю *OX*, обертається навколо осі *OX*. Знайти об'єм тіла обертання.

459. Фігура, обмежена однією дугою косинусоїди $y = \cos x$ і віссю *OX*, обертається навколо осі *OX*. Знайти об'єм тіла обертання.

460. Фігура, обмежена однією дугою косинусоїди $y = \cos\frac{x}{2}$ і віссю *OX*, обертається навколо осі *OX*. Знайти об'єм тіла обертання.

461. Фігура, обмежена параболою $x^2 = 5y$ і прямими $y = 0,\ x = 2,$ обертається навколо осі *OX*. Знайти об'єм тіла обертання.

462. Фігура, обмежена параболою $x^2 = 3y$ і прямою $y = 7,$ обертається навколо осі *OУ*. Знайти об'єм тіла обертання.

463. Фігура, обмежена параболою $y = \dfrac{x^2}{2}$ і прямою $y = 4x,$ обертається навколо осі *OX*. Знайти об'єм тіла обертання.

464. Фігура, обмежена параболою $y=\dfrac{x^2}{3}$ і прямою $y=2x$, обертається навколо осі *ОУ*. Знайти об’єм тіла обертання.

465. Фігура, обмежена параболою $x=y^2$ і прямою $y=\dfrac{x}{2}$, обертається навколо осі *ОХ*. Знайти об’єм тіла обертання.

466. Фігура, обмежена параболою $x=2y^2$ і прямою $y=\dfrac{x}{3}$, обертається навколо осі *ОУ*. Знайти об’єм тіла обертання.

467. Фігура, обмежена кубічною параболою $y=x^3$ і прямою $y=x$, обертається навколо осі *ОХ*. Знайти об’єм тіла обертання.

468. Фігура, обмежена кубічною параболою $y=x^3$ і прямою $y=4x$, обертається навколо осі *ОУ*. Знайти об’єм тіла обертання.

469. Фігура, обмежена параболою $y^2=4-x$ і прямою $x=-2$, обертається навколо осі *ОХ*. Знайти об’єм тіла обертання.

В задачах **470 – 489** обчислити довжину дуги кривої в заданих межах аргументу.

470. $y^2=x^3,\quad y\ge 0,\quad x_1=0,\quad x_2=1.$

471. $y=\ln\sin x,\quad x_1=\dfrac{\pi}{3},\quad x_2=\dfrac{\pi}{2}.$

472. $y=\dfrac{x^2}{2},\quad x_1=0,\quad x_2=1.$

473. $y=\sqrt{x},\quad x_1=0,\quad x_2=1.$

474. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\quad x_1=0,\quad x_2=1.$

475. $y=(x-1)^{3/2},\quad x_1=2,\quad x_2=5.$

476. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2},\quad x_1=1,\quad x_2=2.$

477. $y=\ln(x^2-1),\quad x_1=2,\quad x_2=3.$

478. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, \quad x_1=0, \quad x_2=\frac{7}{9}.$

479. $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}, \quad x_1=0, \quad x_2=2.$

480. $x=\cos^3 t, \ y=\sin^3 t.$

481. $x=\cos t+t\sin t, \ y=\sin t-t\cos t$ від $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

482. $x=t-\sin t, \ y=1-\cos t$ від $t_1=0$ до $t_2=2\pi$.

483. $x=e^t\sin t, \ y=e^t\cos t, \ t_1=0, t_2=1.$

Відповіді

344. $\frac{14}{3}.$ **345.** $3\frac{63}{64}.$ **346.** $2(e-1).$ **347.** $\frac{1}{2}.$ **348.** $\frac{26}{9}.$ **349.** $\frac{26}{81}.$

350. $\frac{\pi}{4}.$ **351.** $\frac{1}{2}\ln\frac{11}{7}.$ **352.** $\frac{1}{6}\ln\frac{16}{7}.$ **353.** $\ln 2.$ **354.** $\frac{\ln 2}{4}.$ **355.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}.$

356. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{49+3\sqrt{5}}{2}.$ **357.** $\frac{\pi}{2}.$ **358.** $-8.$ **359.** $0.$ **360.** $\frac{arctg 2\sqrt{2}-arctg\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

361. $2-6\ln\frac{6}{5}.$ **362.** $2-4\ln\frac{7}{5}.$ **363.** $-5\frac{1}{3}.$ **364.** $2\left(1+\ln\frac{5}{3}\right).$ **365.** $\frac{2}{9}.$

366. $-39{,}5+75\ln\frac{7}{4}.$ **367.** $2-16\ln\frac{10}{9}.$ **368.** $\frac{3\pi}{4}.$ **369.** $\frac{1}{9}\left(2-\sqrt{2}\right).$

370. $\frac{1}{3}\left(\arccos\frac{3}{5}-\arccos\frac{3}{4}\right).$ **371.** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$ **372.** $\frac{\sqrt{2}}{8}.$ **373.** $\frac{5e^2\left(e^4-1\right)}{4}.$

374. $\frac{\pi+4}{2}.$ **375.** $\frac{\pi-2}{8}.$ **376.** $6\ln 2-2.$ **377.** $\frac{\pi-2\ln 2}{4}.$ **378.** $\frac{e^2-7}{4}.$

379. $\frac{2e^3+1}{9}.$ **380.** $\frac{1}{5}.$ **381.** $-\frac{1}{2}.$ **382.** Розбіжний**.** **383.** Розбіжний.

384. $\pi.$ **385.** Розбіжний**.** **386.** $\frac{\pi}{8}.$ **387.** Розбіжний**.** **388.** Розбіжний.

389. $\frac{\pi}{6}$. **390.** 1. **391.** Розбіжний. **392.** $\frac{1}{2}$. **393.** Розбіжний. **394.** $\frac{1}{2}\ln 3$.

395. $2\sqrt{7}$. **396.** 3. **397.** $\frac{5\sqrt[5]{16}}{4}$. **398.** Розбіжний. **399.** Розбіжний.

400. Розбіжний. **401.** $4\sqrt[4]{2}$. **402.** $-\frac{1}{2\ln^2 3}$. **403.** Розбіжний.

404. Розбіжний. **405.** Збіжний. **406.** Збіжний. **407.** Збіжний. **408.** Збіжний.
409. Розбіжний. **410.** Збіжний. **411.** Розбіжний. **412.** Розбіжний.

413. Розбіжний. **414.** Збіжний. **415.** Розбіжний. **416.** $\frac{1}{2}$. **417.** $\frac{17\sqrt{17}}{6}$.

418. $20\frac{1}{4}$. **419.** 12. **420.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **421.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **422.** $20\frac{5}{6}$. **423.** $8\ln 2$.

424. $\frac{1}{4}\left(21-8\ln\frac{5}{2}\right)$. **425.** $16-4\ln 3$. **426.** e^4-1. **427.** e^4-1. **428.** $\frac{e^4-1}{2e^4}$.

429. $\frac{2\left(e^2-1\right)}{e^2}$. **430.** $3(e-1)$. **431.** $\ln 2$. **432.** $\frac{1}{4}\ln 2$. **433.** 15. **434.** 31,5.

435. 6. **436.** $\frac{e^4+e^3-e-1}{2e^2}$. **437.** $6\frac{1}{4}$. **438.** $\pi-\frac{2}{3}$. **439.** $\frac{35-12\ln 6}{2}$. **440.** 4.

441. 6π. **442.** $\frac{27\pi}{2}$. **443.** 24π. **444.** 6π. **445.** 72π. **446.** $\frac{81\pi}{2}$.

447. $\frac{19a^2\pi}{2}$. **448.** $\frac{19a^2\pi}{2}$. **449.** 2π. **450.** $\frac{9\pi}{2}$. **451.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **452.** $\frac{\pi a^2}{8}$.

453. $\frac{500\pi}{3}$. **454.** $\frac{64\pi}{27}$. **455.** 32π. **456.** $\frac{256\pi}{9}$. **457.** $\frac{\pi^2}{2}$. **458.** $\frac{\pi^2}{4}$. **459.** $\frac{\pi^2}{2}$.

460. π^2. **461.** $\frac{32\pi}{125}$. **462.** $\frac{147\pi}{2}$. **463.** $\frac{5120\pi}{3}$. **464.** 72π. **465.** $\frac{8\pi}{3}$

466. $\frac{81\pi}{20}$. **467.** $\frac{8\pi}{21}$. **468.** $\frac{256\pi}{15}$. **469.** 18π. **470.** $\frac{8}{27}(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1)$.

471. $\frac{1}{2}\ln 3$. **472.** $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. **473.** $\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

474. $\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})$. **475.** $\frac{1}{27}(80\sqrt{10}-13\sqrt{13})$. **476.** $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$. **477.** $1+\ln\frac{3}{2}$.

478. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$. **479.** 3. **480.** 6. **481.** $\frac{\pi^2}{2}$. **482.** 8. **483.** $\sqrt{2}(e-1)$.

§4. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1.1. а) $y = x^2 + 7x$, $y = 4x + 4$; б) $\rho = 3(2 + \cos\varphi)$.

1.2. а) $y = x^2 - 4$, $x - y - 2 = 0$; б) $\rho = \cos\varphi$, $\rho = 2\cos\varphi$.

1.3. а) $y = x^2 - 3x$, $y = 2x - 6$; б) $\rho = 1 + 2\sin\varphi$.

1.4. а) $y = x^2 + 5x$, $y = 2x + 4$; б) $\rho = 1 + 2\cos\varphi$.

1.5. а) $y = x^2 + 4x$, $3x + y + 6 = 0$; б) $\rho = 2(1 - \sin\varphi)$.

1.6. а) $y = x^2 - 2x$, $y = x + 4$; б) $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$.

1.7. а) $y = x^2 - 3x - 4$, $x + y - 4 = 0$; б) $\rho = 3\sin 2\varphi$.

1.8. а) $y = 3x^2 - 3$, $y = x^2 + 6x + 5$; б) $\rho = 3\cos 2\varphi$.

1.9. а) $y = x^2 - 5x$, $3x + y - 3 = 0$; б) $\rho = 3 - \sin\varphi$, $\rho = 1$.

1.10. а) $y = x^2 - 2x - 1$, $x + y - 1 = 0$; б) $\rho = 2 + \sin\varphi$, $\rho = 3$.

1.11. а) $y = x^2 - 4x$, $x + y - 4 = 0$; б) $\rho = 2\cos 2\varphi$.

1.12. а) $y = 4 + x$, $y = x^2 - 2x$; б) $\rho = 3 - 2\sin\varphi$.

1.13. а) $y = x^2 - 4x - 3$, $3x + y + 1 = 0$; б) $\rho = 3 + \cos\varphi$, $\rho = 2$.

1.14. а) $y = 9 - x^2$, $y = x^2 - 3x$; б) $\rho = 2\sin 2\varphi$.

1.15. а) $y = x^2 - 5x + 1$, $2x + y - 1 = 0$; б) $\rho = 3 + \sin\varphi$, $\rho = 2$.

1.16. а) $y = x^2 + 4x$, $y = 7x + 4$; б) $\rho = 3(2 + \cos\varphi)$.

1.17. а) $y = 2x^2 + 7x + 1$, $y = 2x - 1$; б) $\rho = 2 + \cos\varphi$, $\rho = 3$.

1.18. а) $y = 4x - 3x^2$, $3x + y - 2 = 0$; б) $\rho = 3 - \cos\varphi$.

1.19. а) $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 3x - 5$; б) $\rho = 2 - \sin 2\varphi$.

1.20. а) $y = 3x^2 + 5x - 1$, $y = 2x - 1$; б) $\rho = 2 - \sin\varphi$.

1.21. а) $y=x^2-3x-2$, $y=-2x$; б) $\rho=2+\sin 2\varphi$.

1.22. а) $y=x^2-2x+4$, $9x+y+2=0$; б) $\rho=1+\sin 2\varphi$.

1.23. а) $y=x^2-3x$, $y=2x-6$; б) $\rho=1-2\cos\varphi$.

1.24. а) $y=5x-2x^2$, $y=2x-2$; б) $\rho=\cos\varphi$, $\rho=3\cos\varphi$.

1.25. а) $y=2x^2+6x+5$, $y=x+3$; б) $\rho=3+2\cos\varphi$, $\rho=1$.

1.26. а) $y=x^2-5x+1$, $2x+y-1=0$; б) $\rho=3+\sin\varphi$, $\rho=2$.

1.27. а) $y=7x-x^2$, $y=4x+2$; б) $\rho=1-2\sin\varphi$.

1.28. а) $y=4-x^2$, $y=x^2-3x+2$; б) $\rho=3-2\cos\varphi$.

1.29. а) $y=x^2-5x$, $y=-x^2+x+8$; б) $\rho=2+\cos 2\varphi$.

1.30. а) $y=x^2+3x$, $4x+y+6=0$; б) $\rho=2-2\sin\varphi$.

Завдання 2. Обчислити довжину дуги кривої:

2.1. $y=\arcsin e^{-x}$; $0\le x\le 1$.

2.2. $x=4(t-\sin t)$; $y=4(t-\cos t)$; $0\le t\le \pi$.

2.3. $y=\ln\cos x-2$; $0\le x\le \frac{\pi}{3}$.

2.4. $x=5(2\cos t-\cos 2t)$; $y=5(2\sin t-\sin 2t)$; $0\le t\le \pi$.

2.5. $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$; $0\le x\le \frac{15}{16}$.

2.6. $x=t^2$; $y=t-\frac{1}{3}t^3$; $0\le t\le 1$.

2.7. $y=3-\ln\sin x$; $\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{2}$.

2.8. $x=8\cos^3 t$; $y=8\sin^3 t$; $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

2.9. $y=1-\ln\cos x$; $0\le x\le \frac{\pi}{4}$.

2.10. $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t$; $\quad y=\left(t^2-2\right)\cos t+2t\cos t$; $\quad 0\le t\le\pi$.

2.11. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}\ln x$; $\quad 1\le x\le 2$.

2.12. $x=4(2\cos t-\cos 2t)$; $\quad y=4(2\sin t-\sin 2t)$; $\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

2.13. $y=x^{3/2}$; $\quad 0\le x\le 4$.

2.14. $x=e^t(\cos t+\sin t)$; $\quad y=e^t(\cos t-\sin t)$; $\quad 0\le t\le 2\pi$.

2.15. $y=\dfrac{2}{3}(x+2)^{3/2}$; $\quad -2\le x\le 1$.

2.16. $x=6(\cos t+t\sin t)$; $\quad y=6(\sin t-t\cos t)$; $\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

2.17. $y=\ln\cos x+2$; $\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$.

2.18. $x=\cos t-\dfrac{1}{2}\cos 2t$; $\quad y=\sin t-\dfrac{1}{2}\sin 2t$; $\quad 0\le t\le\pi$.

2.19. $x=3(\cos t+t\sin t)$; $\quad y=3(\sin t-t\cos t)$; $\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{3}$.

2.20. $y=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$; $\quad 0\le x\le 1$.

2.21. $x=\cos^3 t$; $\quad y=\sin^3 t$; $\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

2.22. $y=e^{x/2}+e^{-x/2}$; $\quad 0\le x\le 2$.

2.23. $x=3(t-\sin t)$; $\quad y=3(t-\cos t)$; $\quad 0\le t\le\pi$.

2.24. $y=\sqrt{1-x^2+\arccos x}$; $\quad 0\le x\le\dfrac{8}{9}$.

2.25. $x=3(2\cos t-\cos 2t)$; $\quad y=3(2\sin t-\sin 2t)$; $\quad 0\le t\le\pi$.

2.26. $y=1-\ln\sin x$; $\quad \dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

2.27. $x=4\sin t+3\cos t$; $\quad y=3\sin t-4\cos t$; $\quad 0\le t\le\pi$.

2.28. $2y^2 = x^3$; $0 \le x \le 4$.

2.29. $x = e^t(\cos t + \sin t)$; $x = e^t(\cos t - \sin t)$; $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2.30. $y = \sqrt{1 - x^2}$; $0 \le x \le \frac{7}{9}$.

Завдання 3. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням заданої криволінійної трапеції навколо заданої осі координат:

3.1. $y = \sin x$; $y = 1$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$; Ox.

3.2. $y = x^2$; $y = 0$; $x = 2$; Oy.

3.3. $y = e^x$; $y = 1$; $x = \ln 2$; Ox.

3.4. $y^2 = 3 - x$; $x = 2$; Oy.

3.5. $y = -x^2 + 5x - 4$; $y = x$; Ox.

3.6. $y = 4x^4$; $y = 4x$; Oy.

3.7. $y = 4x - x^2$; $y = x$; Ox.

3.8. $x = 5 - y^2$; $x = 5 - 2y$; Oy.

3.9. $y = \ln x$; $y = 1$; $x = e^2$; Ox.

3.10. $x = 5y^2$; $x = 5$; Oy.

3.11. $y = \sin x$; $y = 2$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$; Ox.

3.12. $x = 2\sqrt{y}$; $x = 2$; $y = 0$; Oy.

3.13. $x = \sqrt{y}$; $x = 2\sqrt{y}$; $x = 2$; Ox.

3.14. $y = \frac{x^2}{3}$; $y^2 = 3x$; Oy.

3.15. $y = e^{2x}$; $x = 0$; $y = e^2$; Ox.

3.16. $y^2 = 5 - x$; $x = 1$; Oy.

3.17. $y = 5x - x^2$; $y = 2x$; Ox.

3.18. $y^2 = 5 - x$; $x = 4$; Oy.

3.19. $y = -x^2 + 3x + 4$; $y = 0$; Ox.

3.20. $x = 5y^2$; $x = 5$; Oy.

3.21. $y = e^x - 1$; $y = 4$; $x = 0$; Ox.

3.22. $x = 2\ln x$; $x = 0$; $y = 2e$; Oy.

3.23. $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$; Ox.

3.24. $x = 6 - y^2$; $x = 6 - 2y$; Oy.

3.25. $y = (x+1)^2$; $y^2 = x + 1$; Ox.

3.26. $x = 2y^2$; $x - 3y - 9 = 0$; Oy.

3.27. $xy = 7$; $x + y = 8$; Ox.

3.28. $x = 4 - y^2$; $x = 3$; Oy.

3.29. $y = x^2 - 2x$; $y = x + 4$; Ox.

3.30. $x = 8 - y^2$; $x = y^2$; Oy.

Завдання 4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність

4.1. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_0^{2}\frac{dx}{(x-2)^2}$.

4.2. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{2x+5}$; б) $\int\limits_3^{4}\frac{dx}{(x-3)^2}$.

4.3. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+3}$; б) $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$.

4.4. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{3x^2+4}$; б) $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{\sqrt{-x+2}}$.

4.5. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x+1)^2}$; б) $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

4.6. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x}$.

4.7. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+2)^3}$; б) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

4.8. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$; б) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^3}$.

4.9. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{(x-1)^3}$.

4.10. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+3}$; б) $\int\limits_0^{2}\frac{dx}{(x-2)^3}$.

4.11. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+3)^3}$; б) $\int\limits_1^{3}\frac{dx}{\ln x}$.

4.12. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+11}$; б) $\int\limits_{-1,5}^{0}\frac{dx}{(2x+3)^2}$

4.13. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+5}$; б) $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{4-x^2}$.

4.14. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2-2x+3}$; б) $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{x-2}$.

4.15. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10}$; б) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\left(x^2-1\right)}$.

4.16. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{2x^2+5}$; б) $\int\limits_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

4.17. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{3x^2+1}$; б) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

4.18. а) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{\left(\sqrt{2-x}\right)^3}$.

4.19. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{e^{2x}}$; б) $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$.

4.20. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos^2 x}$.

4.21. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{2x^2+3}$; б) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. **4.22.** а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4x^2+7}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

4.23. а) $\int\limits_0^{\infty} \sin x dx$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. **4.24.** а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+17}$; б) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\ln x}$.

4.25. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{5x^2+1}$; б) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **4.26.** а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

4.27. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; б) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. **4.28.** а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+20}$; б) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\left(\sqrt{2-x}\right)^3}$.

4.29. а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$; б) $\int\limits_3^{4} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-3}}$. **4.30.** а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Розділ III. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

§1. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Задача про об'єм циліндричного тіла

Проведемо аналогію даної задачі із задачею про площу криволінійної трапеції.

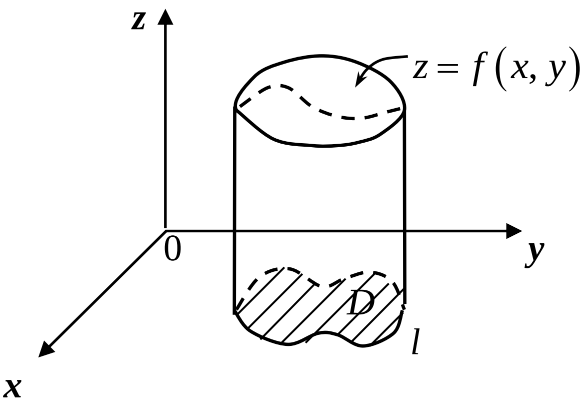


Рис. 3.1

Означення. ***Циліндричним тілом*** називається просторова фігура, обмежена знизу замкненою обмеженою областю D з границею l, розташованою в площині Oxy, з боків - циліндричною поверхнею, з напрямною l і твірними, паралельними осі Oz, а зверху частиною поверхні G, рівняння якої $z = f(x; y)$ (рис. 3.1).

Будемо вважати, що $f(x; y) \geq 0$ для всіх точок області D.

Знайдемо об'єм V циліндричного тіла.

1. Розіб'ємо область D на n малих частин ΔD_i, $i = 1, 2, ..., n$ так, щоб сума їх площ дорівнювала площі всієї області D. Домовимося позначати через S площу області D, а через ΔS_i - площі частин ΔD_i, $i = 1, 2, ..., n$: $S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Розглядатимемо таку область D, яка має скінченну площу S і обмежена однією лінією.

Над кожною областю ΔD_i побудуємо мале циліндричне тіло з об'ємом ΔV_i, обмежене зверху частиною поверхні G, яка проектується в область ΔD_i.

Тоді $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$.

2. У кожній області ΔD_i виберемо довільну точку $P_i(x_i;\ y_i)$ і обчислимо в ній значення функції z: $z_i = f(P_i) = f(x_i; y_i)$.

Побудуємо елементарні циліндри з основами ΔD_i і висотами $f(x_i;\ y_i)$.

Об'єми таких циліндрів наближено дорівнюють об'ємам ΔV_i:

$$\Delta V_i \approx f\left(x_i;\ y_i\right)\Delta S_i.$$

3. Візьмемо суму всіх таких об'ємів і одержимо наближене значення шуканого об'єму V:

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i;\ y_i\right)\Delta S_i}. \tag{3.1}$$

Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей ΔD_i, $i = 1, 2, ..., n$.

4. Перейдемо до границі в сумі (3.1) при $\lambda \to 0$ ($n \to \infty$), тоді

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\,; y_i\right)\Delta S_i.$$

Ця границя не залежить ні від способу розбиття області D на частини, ні від вибору точок P.

<u>Задача про масу пластинки</u>

Нехай задана тонка матеріальна пластинка D, розташована в площині Oxy, яка має змінну густину $\rho(x; y)$ у кожній точці $P(x;\ y)$ області D.

Знайдемо масу m пластинки, за умови, що функція $\rho(x; y)$ неперервна в області D. Проведемо дії, аналогічні попередній задачі.

1. Розіб'ємо область D на n малих частин ΔD_i.

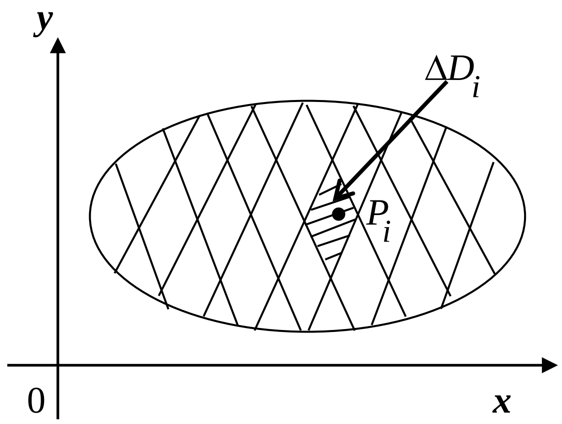


Рис. 3.2

2. У кожній області ΔD_i виберемо довільну точку $P_i\left(x_i;\ y_i\right)$ і обчислимо в ній значення функції ρ

$$\rho_i = \rho\left(P_i\right) = \rho\left(x_i; y_i\right).$$

Приймемо наближено густину кожної ΔD_i сталою і рівною

$$\rho_i = \rho\left(x_i; y_i\right).$$

Тоді маса кожної елементарної частинки ΔD_i наближено буде дорівнювати $\Delta m_i \approx \rho_i\left(P_i\right)\Delta S_i = \rho\left(x_i;\ y_i\right)\Delta S_i$.

3. Маса всієї пластинки $m = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i$ буде наближено рівною

$$\boxed{m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho\left(x_i;\ y_i\right)\Delta S_i}. \tag{3.2}$$

За точне значення шуканої маси приймемо границю суми (3.2), коли $n \to \infty$ і кожна ΔD_i стягується у точку.

Таким чином, розглянуті задачі були зведені до знаходження границь деяких сум.

1.2. ОЗНАЧЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай в обмеженій замкненій області D площини Oxy задана неперервна функція $z = f\left(P\right) = f\left(x; y\right)$.

Виконаємо наступні дії.

1. Розіб'ємо область D на n малих частин ΔD_i так, щоб сума їх площ дорівнювала площі всієї області: $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

2. У кожній ΔD_i виберемо довільну точку $P_i\left(x_i;\ y_i\right)$. Помножимо значення функції $z = f\left(P_i\right) = f\left(x_i;\ y_i\right)$ на ΔS_i:

$$f\left(P_i\right)\Delta S_i = f\left(x_i;\ y_i\right)\Delta S_i.$$

3. Складемо суму всіх таких добутків:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i;\ y_i\right)\Delta S_i. \tag{3.3}$$

Сума (3.3) називається ***інтегральною сумою***, складеною для функції $z = f\left(x; y\right)$ на області D.

4. Перейдемо до границі в сумі (3.3) при $\lambda \to 0$ ($n \to \infty$), де λ - максимальний із діаметрів областей ΔD_i.

<u>Означення.</u> ***Подвійним інтегралом від функції*** $z = f(x; y)$ ***по області*** D називається границя інтегральної суми (3.3), якщо вона існує і не залежить ні від способу розбиття області D на малі частини ΔD_i, ні від вибору точок $P_i(x_i;\ y_i)$ у кожній з них і позначається $\iint\limits_D f(P)dS$ або $\iint\limits_D f(x; y)dxdy$.

Отже,
$$\iint\limits_D f(x; y)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x; y)\Delta S_i, \tag{3.4}$$

де D – *область інтегрування*, dS – *елемент площі*.

<u>Теорема існування подвійного інтеграла</u>.

Для всякої функції $z = f(x; y)$, неперервної в обмеженій замкненій області D, яка має площу, існує подвійний інтеграл.

В подальшому будемо розглядати тільки функції, неперервні в області інтегрування.

З теореми існування та означення подвійного інтеграла випливає, що область D можна розбити на малі прямокутники ΔD_i зі сторонами Δx_i та Δy_i та криволінійні частини, сумарна площа яких прямує до нуля.
Тоді $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$, а подвійний інтеграл запишемо так:

$$\iint\limits_D f(x; y)dS = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta x_i \Delta y_i.$$

З останнього запису видно, що для позначення подвійного інтеграла природно користуватися позначенням

$$\boxed{\iint\limits_D f(x; y)dxdy}. \tag{3.5}$$

<u>Властивості подвійного інтеграла</u>

Оскільки подвійний інтеграл конструктивно визначається так само, як і визначений, його властивості такі ж, як і у визначеного інтеграла:

1°. $\iint\limits_D \left(c_1 f(x;y)+c_2\varphi(x;y)\right)dS = c_1\iint\limits_D f(x;y)dS + c_2\iint\limits_D \varphi(x;y)dS$.

2°. Якщо в області D $f(x;y)\ge 0$, то і $\iint\limits_D f(x;y)dS \ge 0$. Якщо хоча б в одній точці області D $f(x;y)>0$, то $\iint\limits_D f(x;y)dS>0$.

3°. Якщо в області інтегрування $f(x;y)\ge\varphi(x;y)$, то

$$\iint\limits_D f(x;y)dS \ge \iint\limits_D \varphi(x;y)dS.$$

4°. *Властивість адитивності*. Якщо область D розбита на декілька частин $D_1,\ D_2,\ \ldots\ D_k$, що не перетинаються, то

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x;y)dS + \ldots + \iint\limits_{D_k} f(x;y)dS.$$

Теорема про середнє. Нехай функція $f(x;y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D. Тоді в області D існує така точка $P_0(x_0;\ y_0)$, що

$$\iint\limits_D f(x;y)dS = f(x_0;y_0)\cdot S. \qquad (3.6)$$

Якщо $f(x;y)\ge 0$ в області D, то ця теорема має наступний геометричний зміст.

Значення $f(x_0;y_0)=\dfrac{\iint\limits_D f(x;y)dS}{S}$ називається ***середнім значенням функції*** $f(x;y)$ ***в області*** D.

1.3. ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА У ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

Знаходження границь інтегральних сум для подвійного інтеграла, як і для визначеного, пов’язано зі значними труднощами. Тому обчислення подвійного інтеграла зводять до послідовного обчислення двох визначених. Покажемо як це зробити, поки що обмежившись випадком, коли $f(x;y)\ge 0$. Спочатку дамо важливе означення.

<u>Означення.</u> Область D називається ***правильною в напрямі осі*** Oy, якщо вона обмежена зліва і справа прямими $x=a$ та $x=b$, а знизу і зверху лініями $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$. При цьому будь-яка пряма $x=x_0$, паралельна осі Oy, яка проходить через цю область, перетинає кожну з кривих $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ тільки в одній точці (рис. 3.3). Ці точки називають *точками входу* та *виходу*.

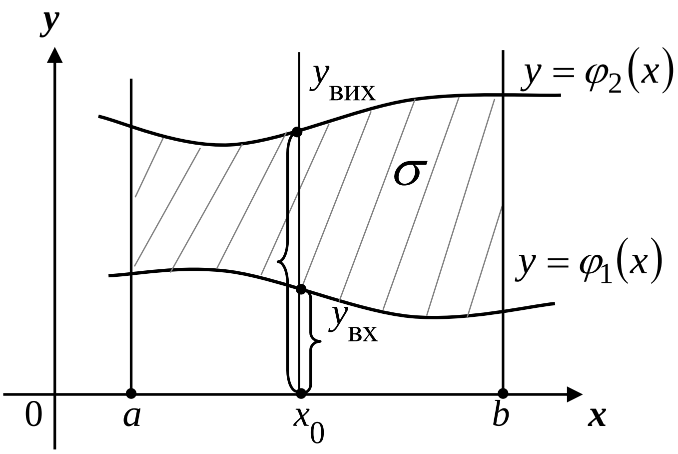


Рис. 3.3

Таку область можна записати системою нерівностей:

$$\begin{cases} a\le x\le b, \\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x). \end{cases} \qquad (3.7)$$

Для такої області подвійний інтеграл (3.5) можна обчислити за формулою

$$\boxed{\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy}. \qquad (3.8)$$

Інтеграл, який стоїть у правій частині формули (3.8), називають ***повторним*** або ***двократним***.

Інтеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy$ з формули (3.8) називають ***внутрішнім***.

При його знаходженні змінна x вважається сталою. В результаті обчислення цього інтеграла одержимо або число, або функцію від x.

Міркуючи цілком аналогічно, одержимо формулу для обчислення подвійного інтеграла для області D, ***правильної у напрямі осі*** Ox.

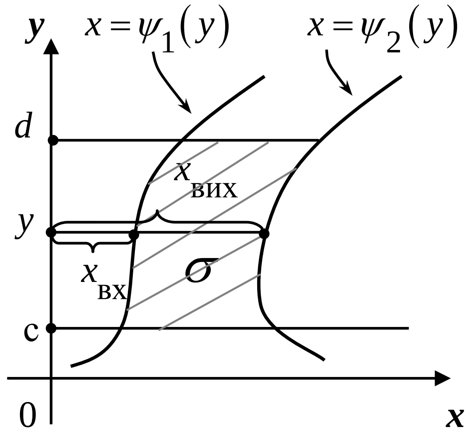


Рис. 3.4

Така область задається системою нерівностей $\begin{cases} c \le y \le d \\ x_{вх} = \psi_1(y) \le x \le x_{вих} = \psi_2(y) \end{cases}$ і має вигляд рис. 3.4 В цьому випадку для обчислення подвійного інтеграла маємо формулу

$$\boxed{\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx}. \quad (3.9)$$

Зауваження 1. У формулах (3.8) та (3.9) межі інтегрування зовнішнього інтеграла завжди сталі.

Зауваження 2. Якщо область інтегрування D є правильною у напрямі обох осей одночасно, то можна користуватися будь-якою з формул (3.8) та (3.9).

Зауваження 3. Якщо область D не є правильною у жодному напрямі, то її потрібно розбити на скінченну кількість областей $D_1, D_2, \ldots D_k$, правильних в одному і тому ж напрямі, і скористатися властивістю адитивності подвійного інтеграла

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)dxdy + \ldots + \iint\limits_{D_k} f(x;y)dxdy} \quad (3.10)$$

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^3 y\, dxdy$ по області D, обмеженій лініями $y = 0$, $x = 2$, $y = x^2$.

<u>*Розв'язання.*</u>

Зробимо рисунок області D. Вона обмежена віссю Ox $(y=0)$, вертикальною прямою $x=2$ та параболою $y=x^2$, яка має вершину в точці $O(0;0)$, а з прямою $x=2$ перетинається в точці $K(2;4)$.

Приведемо два варіанти обчислення подвійного інтеграла.

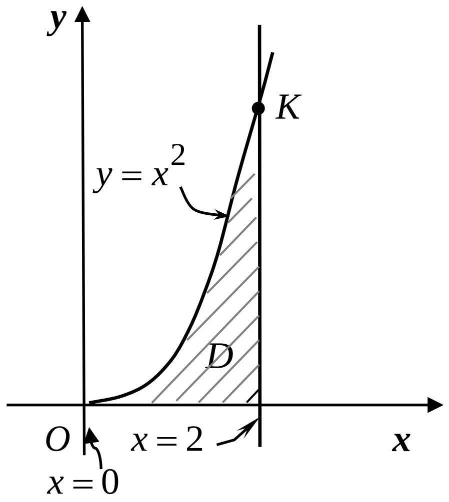


Рис. 3.5(а)

1) Спочатку розглянемо область D у вертикальній смузі $0 \le x \le 2$ (між прямими $x=0$ та $x=2$) (рис. 3.5(а)). Знизу область D обмежена прямою $y=0$, зверху параболою $y=x^2$, тобто $0 \le y \le x^2$. За формулою (3.8) маємо $\iint\limits_D x^3 y\,dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} x^3 y\,dy$.

Далі порядок обчислень буде таким:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} x^3 y\,dy = \int\limits_0^2 dx \left(x^3 \int\limits_0^{x^2} y dy \right) = \int\limits_0^2 dx \left(x^3 \cdot \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{x^2} \right) = \int\limits_0^2 \frac{x^7}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^8}{8} \Bigg|_0^2 = \frac{1}{16} \cdot 2^8 = 16.$$

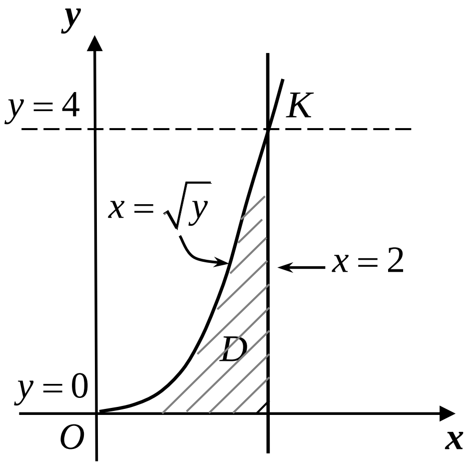


Рис. 3.5(б)

2) Приведемо другий варіант обчислень, розглянувши область D у горизонтальній смузі $0 \le y \le 4$ (між прямими $y=0$ та $y=4$).

З лівого боку область D обмежена гілкою параболи $y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}$, а з правого боку прямою $x=2$, тобто $\sqrt{y} \le x \le 2$ (рис. 3.5(б)).

Застосувавши формулу (3.9), маємо

$$\iint_D x^3 y\, dxdy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 x^3 y\, dx = \int_0^4 y dy \left(\frac{x^4}{4} \Bigg|_{\sqrt{y}}^{2} \right) = \frac{1}{4}\int_0^4 y\, dy \left(16 - y^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \left(16y - y^3\right) dy = \frac{1}{4}\left(\frac{16y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^4 = \frac{1}{4}\left(8 \cdot 16 - \frac{4^4}{4} \right) = \frac{1}{4}\left(2^7 - 2^6\right) = 16.$$

1.4. ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

Найпоширенішою є заміна декартових координат x та y полярними координатами ρ та φ

$$\boxed{x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi}.$$

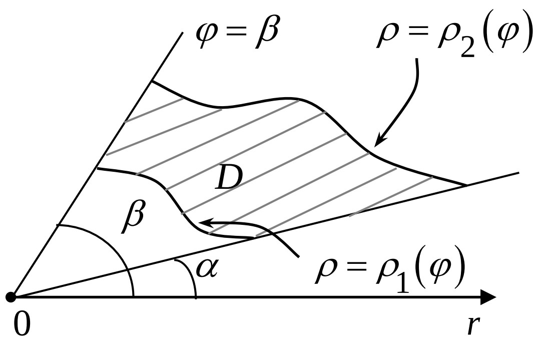


Рис. 3.6

Розглянемо область інтегрування D у полярній системі координат, задану системою нерівностей

$$\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta, \\ \rho_{вх} = \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_{вих} = \rho_2(\varphi). \end{cases}$$

Для побудови інтегральної суми розіб’ємо область на частини ΔD_i за допомогою променів, які виходять з полюса та дуг кіл з центрами у полюсі.

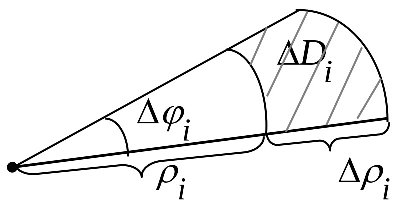


Рис. 3.7

Площа такого криволінійного чотирикутника знаходиться як різниця площ двох кругових секторів і дорівнює

$$\Delta S_i = \left(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2} \right)\Delta\rho_i \Delta\varphi_i .$$

У кожній області ΔD_i виберемо точку P_i, яка лежить на колі, радіусом ρ_i', і має полярний кут φ_i: ρ_i – середній радіус між ρ_i та $\left(\rho_i + \Delta\rho_i\right)$; $\rho_i' = \rho_i + \dfrac{\Delta\rho_i}{2}$. Тоді $\Delta S_i = \rho_i' \Delta\rho_i \Delta\varphi_i$.

Підставимо значення змінних x та y в полярних координатах та величину ΔS_i у інтегральну суму (3.4). Одержимо

$$\iint\limits_D f(x;y)dS = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i;y_i\right)\Delta S_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\rho_i'\cos\varphi_i;\ \rho_i'\sin\varphi_i\right)\cdot\rho_i'\Delta\rho_i\Delta\varphi_i = \iint\limits_D f\left(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi .$$

Отже, має місце формула

$$\boxed{\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \iint\limits_D f\left(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi}. \qquad (3.11)$$

Формула (3.11) називається ***формулою переходу до полярних координат у подвійному інтегралі***.

Вираз $dS = \rho d\rho d\varphi$ називається ***елементом площі в полярних координатах.***

Обчислення подвійного інтеграла у полярних координатах також зводиться до обчислення повторного.

Для заданої області інтегрування формула обчислення подвійного інтеграла має вигляд

$$\boxed{\iint\limits_D f\left(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_{\text{вх}}=\rho_1(\varphi)}^{\rho_{\text{вих}}=\rho_2(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho} \qquad (3.12)$$

Зауваження. Якщо полюс O лежить всередині області D, яка обмежена однією кривою $\rho(\varphi)$, то

$$\boxed{\iint\limits_D f\left(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho}. \qquad (3.13)$$

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$, якщо D - круг з радіусом *R= 3* і з центром у точці *O(0;0).*

Розв'язання.

Перейдемо в інтегралі до полярних координат за формулою (3.12)

$$\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy=\iint\limits_D \sqrt{9-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho d\rho d\varphi=\iint\limits_D \sqrt{9-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi.$$

Скористаємося формулою (3.13) для переходу до повторного інтеграла

$$\iint\limits_D \sqrt{9-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 \sqrt{9-\rho^2}\,\rho d\rho .$$

$$\int\limits_0^3 \sqrt{9-\rho^2}\,\rho d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(9-\rho^2\right)^{1/2}d\left(9-\rho^2\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\left(9-\rho^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^3=9.$$

$$\iint\limits_D \sqrt{9-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi} 9d\varphi=9\varphi\Big|_0^{2\pi}=18\pi.$$

1.5. ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА В ГЕОМЕТРІЇ

Обчислення об'єму циліндричного тіла

Якщо циліндричне тіло обмежене зверху частиною поверхні $z=f\left(x;y\right)$, яка проектується в область D площини Oxy, тоді

$$\boxed{V=\iint\limits_D \left|f\left(x;y\right)\right|dS}. \qquad (3.14)$$

Обчислення площі плоскої області *D*

Якщо в попередньому випадку висоту z циліндричного тіла вважати рівною одиниці $f\left(x;y\right)=1$, то з формули (3.14) випливає, що площа S області D знаходиться за формулою

$$\boxed{S=\iint\limits_D dS}. \qquad (3.15)$$

Обчислення площі поверхні

Якщо поверхня $z = f(x; y)$ має проекцією в площині Oxy область D, то площа її поверхні знаходиться за формулою

$$\boxed{Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dxdy}. \qquad (3.16)$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2x$ та прямою $y = x + 4$. Зробити рисунок.

Розв'язання.

Зробимо схематичний рисунок.

Знайдемо точки перетину заданих ліній (рис. 3.8). Складемо відповідну систему рівнянь і знайдемо її розв'язок

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ x^2 - 2x = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1; \quad y_1 = 3 \\ x_2 = 4; \quad y_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(-1;\ 3), \\ P_2(4;\ 8). \end{cases}$$

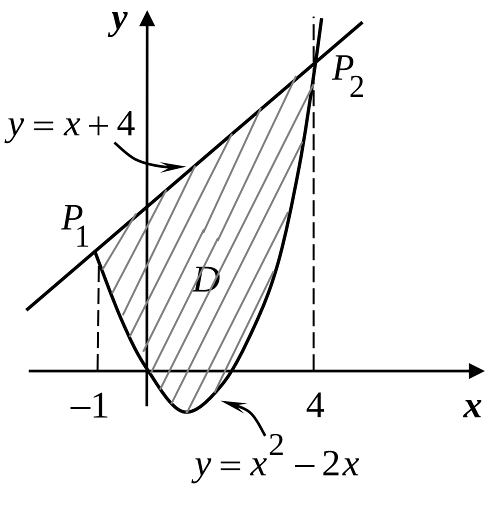


Рис. 3.8

Вершина параболи знаходиться в точці $(1;\ -1)$.

Таким чином, задана фігура збігається з областю D, яка розташована в смузі між прямими $x_1 = -1$ та $x_2 = 4$ і обмежена знизу параболою $y = x^2 - 2x$, а зверху прямою $y = x + 4$ (рис. 3.8).

Обчислимо площу області D .

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-1}^{4}dx\int\limits_{x^2-2x}^{x+4}dy=\int\limits_{-1}^{4}dx\cdot\left(y\Big|_{x^2-2x}^{x+4}\right)=\int\limits_{-1}^{4}\Big((x+4)-\left(x^2-2x\right)\Big)dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{4}\left(-x^2+3x+4\right)\cdot dx=\left(-\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=\left(-\frac{4^3}{3}+3\cdot\frac{4^2}{2}+4\cdot 4\right)-$$

$$-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+3\cdot\frac{(-1)^2}{2}+4\cdot(-1)\right)=-\frac{64}{3}+24+16-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4=21-\frac{1}{6}=\frac{125}{6}\ (\textit{кв.од.}).$$

Приклад. Знайти площу тієї частини поверхні параболоїда обертання $z=x^2+y^2$, яка вирізана циліндром $x^2+y^2=4$.

<u>*Розв'язання.*</u>

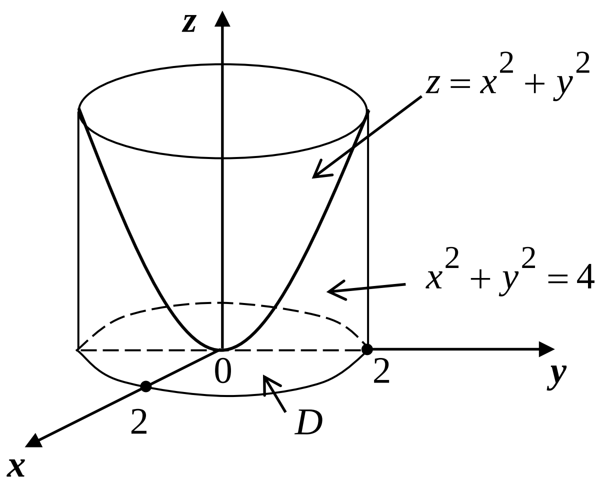


Рис. 3.9

Зробимо схематичний рисунок. Застосуємо формулу (3.16).

$$f(x,\ y)=x^2+y^2,$$
$$f'_x=2x,\ f'_y=2y.$$

Отже,

$$\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}=\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}.$$

Областю інтегрування D є круг R= 2 (рис. 3.9), тому

$$Q=\iint\limits_D\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho.$$

Знайдемо внутрішній інтеграл

$$\int\limits_0^2\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho=\frac{1}{8}\int\limits_0^2\left(1+4\rho^2\right)^{1/2}d\left(1+4\rho^2\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^2=\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

Остаточно

$$Q=\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right)d\varphi=\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)\ (кв.од.).$$

1.6. ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА В МЕХАНІЦІ

<u>Знаходження маси плоскої пластинки</u>

Якщо деяка пластинка розташована у площині Oxy і співпадає з областю D, по якій розподілена маса із змінною поверхневою густиною $\rho(x;y)$, то її маса знаходиться як подвійний інтеграл

$$\boxed{m=\iint_D \rho(x;y)\,dxdy}. \qquad (3.17)$$

<u>Обчислення статичних моментів пластинки</u>

Якщо деяка пластинка розташована у площині Oxy, співпадає з областю D і має поверхневу густину $\rho(x;y)$, то її статичні моменти відносно осей Ox та Oy знаходяться, відповідно,

$$\boxed{M_x=\iint_D y\rho(x;y)\,dxdy}, \qquad (3.18)$$

$$\boxed{M_y=\iint_D x\rho(x;y)\,dxdy}. \qquad (3.19)$$

<u>Обчислення координат центра маси</u>

Для зазначеної вище пластинки D з попередніх формул випливають формули для знаходження координат $\overline{x}$ та $\overline{y}$ центра маси:

$$\boxed{\overline{x}=\frac{\iint_D x\rho(x;y)\,dxdy}{\iint_D \rho(x;y)\,dxdy};\qquad \overline{y}=\frac{\iint_D y\rho(x;y)\,dxdy}{\iint_D \rho(x;y)\,dxdy}}. \qquad (3.20)$$

Знаходження моментів інерції плоскої пластинки

Моменти інерції відносно осей координат Ox та Oy знаходяться, відповідно, як

$$\boxed{I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x;y)\,dxdy \quad \text{та} \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x;y)\,dxdy}. \tag{3.21}$$

Момент інерції відносно початку координат:

$$\boxed{I_O = I_x + I_y = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x;y)\,dxdy}. \tag{3.22}$$

Приклад. Знайти координати центра маси однорідної пластинки, обмеженої параболами $y = x^2$, $y = 2x^2$ та прямими $x = 1$, $x = 2$.

Розв'язання.

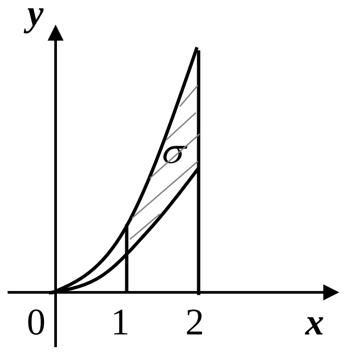


Рис. 3.10

Оскільки

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m},$$

спочатку знайдемо масу m за формулою (3.17), врахувавши, що пластинка однорідна, тобто $\rho(x;y) = \rho_0$, де число ρ_0 не залежить від точки $(x;y)$.

$$m = \iint\limits_D \rho_0 dxdy = \rho_0 \int\limits_1^2 dx \int\limits_{x^2}^{2x^2} dy = \rho_0 \int\limits_1^2 \left(2x^2 - x^2\right)dx = \rho_0 \frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{7}{3}\rho_0.$$

Далі, за формулою (3.18), маємо $M_x = \iint\limits_\sigma y\rho_0 dxdy = \rho_0 \int\limits_1^2 dx \int\limits_{x^2}^{2x^2} ydy$.

Обчислимо внутрішній інтеграл

$$\int\limits_{x^2}^{2x^2} ydy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{2x^2} = \frac{3}{2}x^4, \text{ тоді : } M_x = \rho_0\int\limits_1^2 \frac{3}{2}x^4dx = \frac{3}{10}x^5\rho_0\Big|_1^2 = \frac{93}{10}\rho_0.$$

$$M_y = \iint\limits_{\sigma} x\rho_0 dxdy = \rho_0\int\limits_1^2 xdx\int\limits_{x^2}^{2x^2} dy = \rho_0\int\limits_1^2 x\left(2x^2 - x^2\right)dx = \rho_0\int\limits_1^2 x^3dx = \frac{x^4}{4}\rho_0\Big|_1^2 = \frac{15}{4}\rho_0.$$

Остаточно маємо $\bar{x} = \frac{15}{4}\rho_0 : \frac{7}{3}\rho_0 = \frac{45}{28}$; $\bar{y} = \frac{93}{10}\rho_0 : \frac{7}{3}\rho_0 = \frac{279}{70}$.

§2. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. ОЗНАЧЕННЯ ПОТРІЙНОГО ІНТЕГРАЛА. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є тіло трьох вимірів.

Нехай в просторі задано тіло V, об'єм якого теж позначатимемо V. Нехай у кожній точці $P(x; y; z)$ цього тіла визначена функція $u = f(P) = f(x; y; z)$.

1. Розіб'ємо тіло V на n частинок ΔV_i, об'єми яких позначатимемо $\Delta V_i,\ i = 1, 2, ..., n.$ При цьому $V = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i$.

2. В кожній ΔV_i виберемо довільну точку $P_i\left(x_i;\ y_i;\ z_i\right)$ і обчислимо в ній значення функції u.

Знайдемо добутки $f\left(P_i\right)\Delta V_i = f\left(x_i;\ y_i;\ z_i\right)\Delta V_i$.

3. Складемо суму всіх таких добутків

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right)\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i;\ y_i;\ z_i\right)\Delta V_i\ . \tag{3.23}$$

Ця сума називається ***інтегральною сумою для функції*** $f(x; y; z)$ ***по області*** V. Позначимо через λ найбільший з діаметрів тіла $\Delta V_i,\ i = 1, 2, ..., n.$

4. Перейдемо до границі в сумі (3.23) при $\lambda \to 0$, при цьому $\Delta V_i \to 0$:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i; y_i; z_i\right)\Delta V_i\ .$$

Означення. ***Потрійним інтегралом від функції*** $f(x;y;z)$ ***по області*** V називається границя інтегральної суми при $\lambda \to 0$, якщо вона існує і не залежить ні від способу розбиття тіла V на малі частини ΔV_i, ні від вибору точок $P_i\left(x_i;\ y_i;\ z_i\right)$ у кожній частині ΔV_i.

Потрійний інтеграл позначають $\iiint\limits_V dV$ або $\iiint\limits_V f(x;y;z)dV$.

Отже,
$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i;y_i;z_i\right)\Delta V_i.. \tag{3.24}$$

Зауваження. До поняття потрійного інтеграла приводить велика кількість задач геометрії, фізики тощо.

Теорема /існування потрійного інтеграла/.

Для всякої функції $u = f(x;y;z)$, неперервної в обмеженій замкненій області простору V, що має об'єм, існує потрійний інтеграл.

Зауваження. Основні властивості потрійного інтеграла цілком аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

Зауваження 1. Якщо $f(x;y;z) \equiv 1$ для точок області V, то потрійний інтеграл чисельно дорівнює об'єму області
$$\boxed{\iiint\limits_V dV = V}.$$

В цьому полягає ***геометричний зміст потрійного інтеграла***.

Зауваження 2. Оскільки при побудові інтегральної суми (3.23) область V можна розбивати на елементарні частини довільним чином, потрійний інтеграл можна записувати у вигляді $\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz$.

2.2. ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНОГО ІНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

Обчислення потрійного інтеграла, зводиться до обчислення трикратного інтеграла. При цьому область інтегрування має бути правильною.

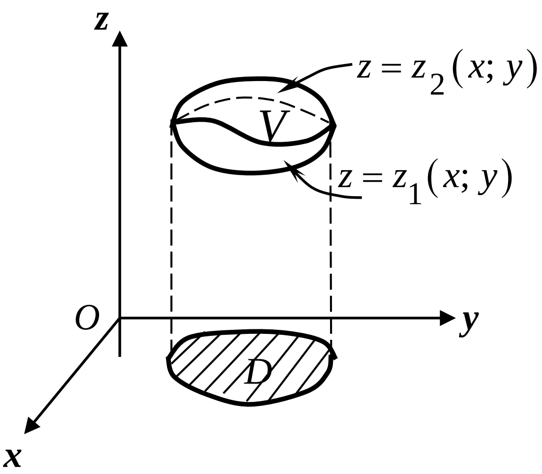


Рис. 3.11

Означення. Область V називається ***правильною у напрямі осі*** Oz, якщо вона обмежена знизу поверхнею $z_1 = f_1(x_1;\ y_1)$, зверху поверхнею $z_2 = f_2(x_2;\ y_2)$, які проектуються в область D площини Oxy.

При цьому область D є *правильною* у напрямі осі Oy.

Якщо проекція D є *правильною у напрямі осі* Oy, то система нерівностей має вигляд:

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \\ z_1(x,\ y) \le z \le z_2(x,\ y). \end{cases}$$

Якщо проекція D є *правильною у напрямі осі* Ox, то система нерівностей має вигляд:

$$\begin{cases} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \\ z_1(x,\ y) \le z \le z_2(x,\ y). \end{cases}$$

Тоді для обчислення потрійного інтеграла справедливі, відповідно, такі формули

$$\boxed{\begin{gathered} \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x;\,y)}^{z_2(x;\,y)} f(x;\,y;\,z)\,dz \\[2ex] \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x;\,y)}^{z_2(x;\,y)} f(x;\,y;\,z)\,dz \end{gathered}} \qquad (3.25)$$

Область V може бути правильною у напрямі інших осей координат. Тоді у формули (3.25) вносять відповідні зміни порядку інтегрування.

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_1^4 y(x+2z)dz$.

<u>*Розв'язання.*</u>

Спочатку обчислюємо внутрішній інтеграл по змінній z, вважаючи змінні x та y сталими.

Отриманий вираз інтегруємо по змінній y, вважаючи x сталою, а отриманий результат інтегруємо по змінній x.

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_1^4 y(x+2z)dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_1^3 dy \left(yx \int\limits_1^4 dz + 2y \int\limits_1^4 zdz \right) = \int\limits_0^2 dx \int\limits_1^3 dy \left(xyz \Big|_1^4 + 2y \frac{z^2}{2} \Big|_1^4 \right) =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_1^3 (3xy + 15y) dy = \int\limits_0^2 dx \left((3x+15) \int\limits_1^3 ydy \right) = \int\limits_0^2 dx \left((3x+15) \frac{y^2}{2} \Big|_1^3 \right) =$$

$$= \int\limits_0^2 (3x+15)\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) dx = 12 \int\limits_0^2 (x+5) dx = 12 \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right)\Bigg|_0^2 = 12 \cdot (2+10) = 144.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $I = \iiint xdxdydz$, якщо область V обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z+y+z=1$.

<u>*Розв'язання.*</u>

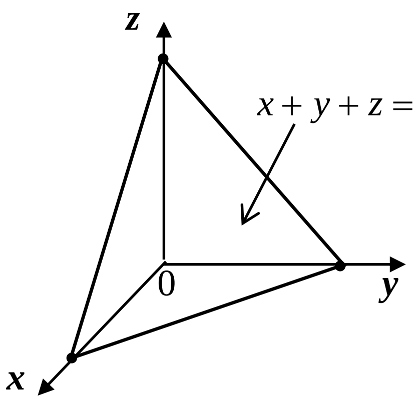


Рис. 3.12

Зобразимо область V (рис. 3.12) та представимо потрійний інтеграл у вигляді трикратного:

$$I = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)dy.$$

Знаходимо інтеграли

– внутрішній $$\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)\,dy=\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2};$$

– зовнішній $$I=\int\limits_0^1 x\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{24}.$$

2.3. ЗАСТОСУВАННЯ ПОТРІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

1. *В геометрії* за допомогою потрійного інтеграла можна знаходити *об'єм* V, якщо покласти $f(x;y;z)\equiv 1$:

$$\boxed{V=\iiint\limits_V dxdydz}. \tag{3.26}$$

2. *Маса* m *тіла*, яке займає об'єм V і має змінну густину $\rho(x;y;z)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{m=\iiint\limits_V \rho(x;y;z)\,dxdydz}. \tag{3.27}$$

3. *Статичні моменти відносно координатних площинах*. Якщо тіло V має змінну густину $\rho(x;y;z)$, то статичні моменти:

– відносно Oxy: $$\boxed{S_{xy}=\iiint\limits_V z\rho(x;y;z)\,dxdydz};$$

– відносно Oyz: $$\boxed{S_{yz}=\iiint\limits_V x\rho(x;y;z)\,dxdydz}; \tag{3.28}$$

– відносно Oxz: $$\boxed{S_{xz}=\iiint\limits_V y\rho(x;y;z)\,dxdydz}.$$

4. *Координати центра маси тіла* V можна записати через потрійні інтеграли (3.27) та (3.28), врахувавши, що

$$\boxed{\overline{x}=\frac{S_{yz}}{m};\quad \overline{y}=\frac{S_{xz}}{m};\quad \overline{z}=\frac{S_{xy}}{m}}. \tag{3.29}$$

5. *Моменти інерції тіла*:

– відносно координатних осей

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2 + x^2\right)\rho\left(x;y;z\right)dxdydz,$$
$$I_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)\rho\left(x;y;z\right)dxdydz, \quad I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\rho\left(x;y;z\right)dxdydz; \tag{3.30}$$

– відносно координатних площин

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\rho(x,\ y,\ z)dxdydz, \quad I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\rho(x,\ y,\ z)dxdydz,$$
$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\rho(x,\ y,\ z)dxdydz; \tag{3.31}$$

– відносно початку координат

$$I_O = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\rho\left(x;\, y;\, z\right)dxdydz. \tag{3.32}$$

Зауваження. Для однорідного тіла $\rho\left(x;\, y;\, z\right) \equiv 1$, тоді формули (3.27)-(3.32) спрощуються.

Приклад. Обчислити моменти інерції відносно осі Oz однорідної піраміди V, яка має густину $\rho = 2$ і обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Розв'язання.

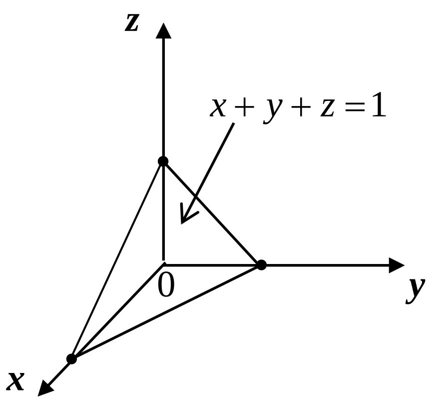


Рис. 3.13

Скориставшись третьою формулою (3.30), поклавши $\rho\left(x;\, y;\, z\right) = 2$, маємо:

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\rho\left(x;\, y;\, z\right)dxdydz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \left(x^2 + y^2\right)2dz.$$

$$I_{\text{вн.1}} = \int\limits_0^{1-x-y} \left(x^2 + y^2\right) 2dz = 2\left(x^2 + y^2\right)(1 - x - y);$$

$$I_{\text{вн.2}} = 2\int\limits_0^{1-x} \left(x^2(1-x) + y^2(1-x) - x^2 y - y^2\right) dy =$$

$$= 2x^2(1-x)y\Big|_0^{1-x} + 2(1-x)\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x} - x^2 y^2\Big|_0^{1-x} - \frac{y^4}{2}\Big|_0^{1-x} =$$

$$= 2x^2(1-x)^2 + \frac{2}{3}(1-x)^3 - x^2(1-x)^2 - \frac{(1-x)^4}{2} = x^2(1-x)^2 + \frac{2}{3}(1-x)^3 - \frac{(1-x)^4}{2}.$$

Тоді
$$I_z = \int\limits_0^1 \left(x^2(1-x)^2 + \frac{2}{3}(1-x)^3 - \frac{(1-x)^4}{2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) dx - \frac{(1-x)^4}{6}\Big|_0^1 + \frac{(1-x)^5}{10}\Big|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}.$$

§3. КРИВОЛІНІЙНІ КООРДИНАТИ У ПОДВІЙНОМУ ТА ПОТРІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ

3.1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Ми вже розглядали як можна застосувати полярні координати у подвійному інтегралі. Розглянемо більш загальний випадок заміни змінної у подвійному та потрійному інтегралі.

Нехай нові змінні $u,\ v,\ w$ пов'язані з декартовими координатами $x,\ y,\ z$ законами $x = x(u; v; w)$, $y = y(u; v; w)$, $z = z(u; v; w)$, де функції $x(u; v; w)$, $y(u; v; w)$, $z(u; v; w)$ є неперервними разом зі своїми першими частинними похідними. І нехай ці функції встановлюють взаємно однорідне відображення області V_1 в криволінійних координатах $u,\ v,\ w$ на область V у декартових координатах $x,\ y,\ z$.

Розглянемо функціональний визначник $J(u;\ v;\ w)=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix}$,

який називається ***визначником Якобі*** або ***якобіаном перетворення координат***.

Якщо $J \neq 0$, то можна довести формули переходу від координат $u,\ v,\ w$ до координат $x,\ y,\ z$ або від координат $x,\ y,\ z$ до координат $u,\ v,\ w$ у потрійному інтегралі

$$\boxed{\iiint\limits_{V} f(x,\ y,\ z)\,dxdydz=\iiint\limits_{V_1} f\left(x(u;\ v;\ w);y(u;\ v;\ w);z(u;\ v;\ w)\right)|J|\,dudvdw}. \quad (3.33)$$

Для подвійного інтеграла формула (3.33) має вигляд

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x;\ y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1} f\left(x(u;v);\ y(u;v)\right)|J|\,dudv}, \quad (3.34)$$

Зауваження. D_1 та V_1 – області, які відповідають областям D та V.

3.2. ПОЛЯРНІ КООРДИНАТИ У ПОДВІЙНОМУ ТА ЦИЛІНДРИЧНІ КООРДИНАТИ У ПОТРІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ

У полярних координатах новими змінними у нас будуть ρ та φ, які пов'язані зі старими змінними x, y рівняннями $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Тоді якобіан переходу від декартових координат до полярних буде:

$$J(\rho;\ \varphi)=\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho.$$

Згідно формули (3.33) маємо формулу (3.11) переходу від декартової до полярної системи координат у подвійному інтегралі

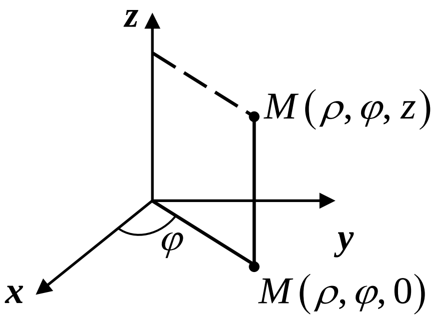


Рис. 3.14

Координатними поверхнями циліндричної системи є циліндр $\rho = \text{const}$ і площини $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$. Положення точки M простору однозначно задається трьома числами (координатами) $\rho,\ \varphi,\ z$. Точка M' є проекцією точки M у площину Oxy і має у ній полярні координати $\rho,\ \varphi$.

Якщо ввести декартову систему координат так, як на рис. 3.14, то циліндрична та декартова системи зв'язуються формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. При цьому $0 \le \rho \le \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty \le z \le \infty$.

Знайдемо якобіан переходу від декартових до циліндричних координат:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Тоді при переході у потрійному інтегралі до циліндричних координат маємо

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi;\ z)\,\rho\, d\varphi\, d\rho\, dz}. \qquad (3.35)$$

3.3. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ У СФЕРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

Визначимо положення точки $M \in V$ наступними трьома величинами:
а) відстанню r від початку координат O до точки M;
б) кутом θ між відрізком OM і додатнім напрямом осі Oz;
в) кутом φ між проекцією відрізка OM на площину Oxy і додатнім напрямом осі Ox.

Величини $(r,\ \varphi,\ \theta)$ називаються *сферичними координатами точки М.*

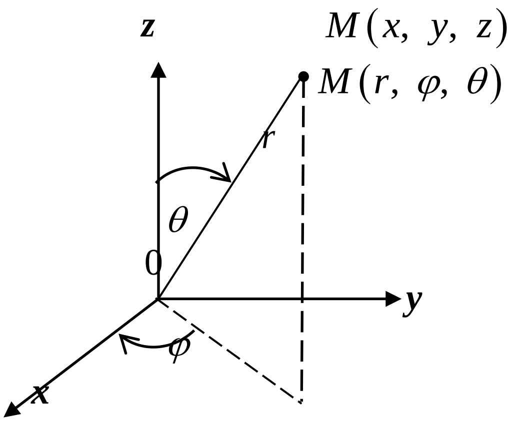


Рис. 3.15

Координатними поверхнями сферичної системи є сфера $r=\text{const}$, площина $\varphi=\text{const}$ та конус $\theta=\text{const}$. Положення будь-якої точки M простору однозначно задається трьома координатами $r,\ \varphi,\ \theta$.

Якщо декартову систему координат ввести так, щоб її початок співпав із центром сфери $r=\text{const}$, то зв'язок між декартовою та сферичною системою встановлюють формули $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$; $0\le r\le\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$.

Складаємо Якобіан $J=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ -r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & 0\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\end{vmatrix}=-r^2\sin\theta.$

Підставивши $|J|$ у формулу (3.34), одержимо

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi;\ r\sin\theta\sin\varphi;\ r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta}.\quad(3.36)$$

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_V dxdydz$, якщо V – це куля $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

Розв'язання.

Перейдемо до сферичних координат, скориставшись формулою (3.36)

$$\iiint\limits_V r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{R}r^2dr,$$

$$I_{\text{вн.1}}=\int_0^R r^2dr=\frac{R^3}{3},\qquad I_{\text{вн.2}}=\frac{R^3}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{2}{3}R^3;$$

$$\iiint\limits_V r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^3=\frac{4}{3}\pi R^3\ (\textit{куб.од.}).$$

§4. ТИПОВІ ЗАДАЧІ З РОЗВ'ЯЗАННЯМ

4.1. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Приклади. Обчислити повторні інтеграли:

1) $I_1 = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^1 \left(x + 3y^2\right) dy$; 2) $I_2 = \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{\sqrt{3}x} xydy$; 3) $I_3 = \int\limits_0^2 dy \int\limits_y^2 \left(y^2 + 2x\right) dx$.

Розв'язання.

1) Спочатку в інтегралі I_1 обчислимо внутрішній інтеграл, в якому змінною є y, а x – стала:

$$I_{\text{вн.}} = \int\limits_0^1 \left(x + 3y^2\right) dy = \int\limits_0^1 xdy + \int\limits_0^1 3y^2 dy = x\int\limits_0^1 dy + 3\int\limits_0^1 y^2 dy = xy\Big|_0^1 + y^3\Big|_0^1 = x + 1.$$

Підставимо отриманий результат у зовнішній інтеграл

$$I_1 = \int\limits_0^4 (x+1)\,dx = \frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_0^4 = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = 12.$$

2) Виконаємо ті ж самі дії, що і в попередньому прикладі:

$$I_{\text{вн.}} = \int\limits_x^{\sqrt{3}x} xydy = x\int\limits_x^{\sqrt{3}x} ydy = x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{\sqrt{3}x} = \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^3 = x^3;$$

$$I_2 = \int\limits_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

3) У даному інтегралі порядок інтегрування інший. Для внутрішнього інтеграла $I_{\text{вн.}} = \int\limits_y^2 \left(y^2 + 2x\right) dx$ змінною є x, а сталою y

$$I_{\text{вн.}}=\int\limits_y^2\left(y^2+2x\right)dx=\int\limits_y^2 y^2dx+\int\limits_y^2 2xdx=y^2\int\limits_y^2 dx+2\int\limits_y^2 xdx=y^2x\Big|_y^2+x^2\Big|_y^2=$$

$$=2y^2-y^3+4-y^2=y^2-y^3+4.$$

Тоді

$$I_3=\int\limits_0^2\left(y^2-y^3+4\right)dy=\frac{y^3}{3}\Big|_0^2-\frac{y^4}{4}\Big|_0^2+4y\Big|_0^2=\frac{8}{3}-4+8=\frac{20}{3}.$$

Приклади. Обчислити подвійні інтеграли

---

1) $I_1=\iint\limits_D x^2ydxdy$, якщо область D обмежена лініями $x=0, x=2, y=-1$, $y=3$;

2) $I_2=\iint\limits_D (2x-y)dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x=0, x+y=2$, $y=0$;

3) $I_3=\iint\limits_D 8xdxdy$, якщо область D обмежена лініями $x=0$, $y=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)$, $x^2+y^2=1$;

4) $I_4=\iint\limits_D xy^2dxdy$, перейшовши до полярних координат, якщо область D лежить у I чверті і обмежена лініями $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=1$.

Розв'язання.

---

1) Зробимо схематичний рисунок області D, обмеженої лініями $x=0$, $x=2$, $y=-1$, $y=3$.

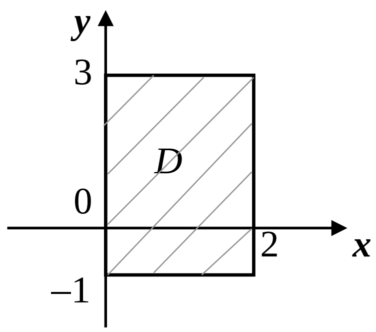


Рис. 3.17

Областю інтегрування D є прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат. Ця область є правильною у напрямі обох осей. Тому справедливі обидві формули (3.9) та (3.10). Використаємо формулу (3.9), тоді

$$I_1=\iint\limits_D x^2ydxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-1}^3 x^2ydy;$$

$$I_{\text{вн.}}=\int_{-1}^{3}x^2ydy=x^2\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-1}^{3}=4x^2,\ \text{тоді}\qquad I_1=\int_0^2 4x^2dx=\frac{4}{3}x^3\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}.$$

2) Зробимо схематичний рисунок області D, обмеженої лініями $x=0,\, x+y=2,\ y=0.$

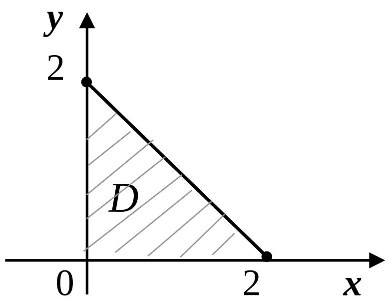


Рис. 3.18

Область інтегрування D є трикутник зі сторонами $x=0$, $y=0$ та $x+y=2$ і є правильною в обох напрямах.

Застосовуємо формулу (3.10)

$$I_2=\iint_D(2x-y)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^{2-y}(2x-y)dx;$$

$$I_{\text{вн.}}=\int_0^{2-y}(2x-y)dx=x^2\Bigg|_0^{2-y}-xy\Bigg|_0^{2-y}=(2-y)^2-(2-y)y=$$

$$=4-4y+y^2-2y+y^2=2y^2-6y+4.$$

Тоді

$$I_2=\int_0^2\left(2y^2-6y+4\right)dy=\frac{2y^3}{3}\Bigg|_0^2-3y^2\Bigg|_0^2+4y\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}-12+8=\frac{4}{3}.$$

3) Зробимо схематичний рисунок області D, обмеженої лініями $x=0$, $y=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right),\ x^2+y^2=1.$

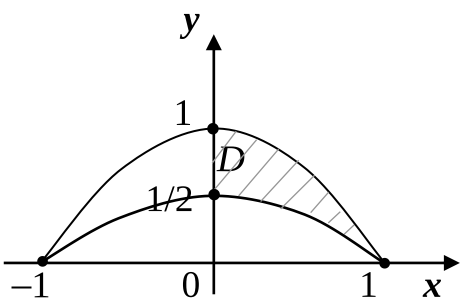


Рис. 3.19

Область D показана на рис. 3.19 і є правильною у напрямі осі Oy.

Згідно формули (3.9)

$$I_3=\iint_D 8xdxdy=\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}}2xdy;$$

$$I_{\text{вн.}}=\int\limits_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}}2xdy=2xy\Bigg|_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}}=2x\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1-x^2}{2}\right)=2x\sqrt{1-x^2}-x+x^3.$$

Тоді

$$I_3=\int\limits_0^1\left(2x\sqrt{1-x^2}-x+x^3\right)dx=-\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^{1/2}d\left(1-x^2\right)-\int\limits_0^1 xdx+\int\limits_0^1 x^3dx=$$

$$=-\frac{2\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^1-\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1+\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{5}{12}$$

4) Зробимо схематичний рисунок області D, яка лежить у I чверті і обмежена лініями $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=1$.

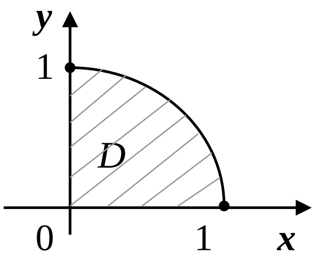


Рис. 3.20

Областю D є чверть кола радіусом 1. Очевидно, що в цій області $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le1$.

Скористаємося формулою (3.14).

Маємо

$$I_4=\iint\limits_D xy^2dxdy=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1\rho^4\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi d\rho;$$

$$I_{\text{вн.}}=\int\limits_0^1\rho^4\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi d\rho=\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\cdot\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi.$$

Тоді

$$I_4=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{5}\cos\varphi\sin^2\varphi d\varphi=\frac{\sin^3\varphi}{15}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{15}.$$

Приклад. Записати подвійний інтеграл у вигляді повторного, взятого у різних напрямах.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

D - область, обмежена лініями $y=x^3$, $y=2-x^2$ та віссю Oy.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок області D, обмеженої лініями $y=x^3$, $y=2-x^2$, $x=0$.

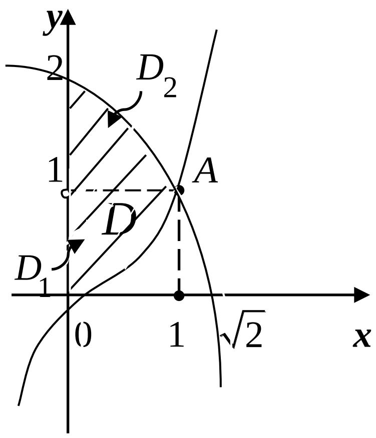


Рис. 3.21

Наша область D, як бачимо з рис. 3.21, є правильною у напрямі осі Oy і не є правильною у напрямі осі Ox.

Знайдемо координати точки A, яка є точкою перетину парабол $y=x^3$, $y=2-x^2$. Прирівняємо праві частини їх рівнянь

$$x^3=2-x^2 \quad \text{або} \quad x^3+x^2=2.$$

Очевидно, дійсним коренем є $x=1$, якому відповідає $y=1$.

Отже, маємо точку $A(1;\ 1)$.

Спочатку представимо нашу область, правильну у напрямі осі Oy, системою нерівностей $0\le x\le 1$, $x^3\le y\le 2-x^2$. Тоді

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^3}^{2-x^2} f(x,y)\,dy.$$

Для того, щоб розставити межі інтегрування при зміні порядку інтегрування, розглянемо область D як суму областей D_1 та D_2. Щоб записати кожну з цих областей системою нерівностей, виразимо спочатку в рівняннях заданих парабол змінну x через змінну y. Для кубічної параболи маємо $x=\sqrt[3]{y}$, а для дуги параболи $y=2-x^2$ отримаємо $x=\sqrt{2-y}$. Тоді

$$D_1:\begin{cases}0\le y\le 1,\\ 0\le x\le \sqrt[3]{y}\end{cases} \qquad \text{та} \qquad D_2:\begin{cases}1\le y\le 2,\\ 0\le x\le \sqrt{2-y}\end{cases}.$$

Спираючись на властивість 4° (адитивність), маємо

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx.$$

4.2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями, за допомогою подвійного інтеграла

$$y^2 = 2x, \quad y = x.$$

Розв'язання.

Щоб зобразити область, знайдемо точки перетину параболи та прямої, тобто розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2x, \\ y = x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Зробимо схематичний рисунок.

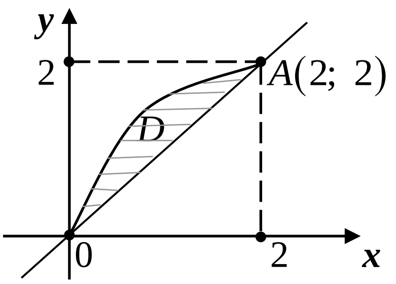


Рис. 3.22

Маємо дві точки перетину ліній – точку $O(0;\ 0)$ та точку $A(2;\ 2)$.

Згідно формули (3.16) $\quad S = \iint\limits_D dxdy.$

Область D є правильною в обох напрямах. Для зручності інтегрування, запишемо її так

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 2, \\ \dfrac{y^2}{2} \le x \le y. \end{cases}$$

Обчислюючи площу, перейдемо від подвійного інтеграла до повторного

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{y} dx = \int\limits_0^2 \left(y - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^2 - \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^2 = \frac{2}{3} (кв.од.).$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого

параболоїдом $z = x^2 + y^2$ та площинами $x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Розв'язання.

Зробимо схематичний рисунок.

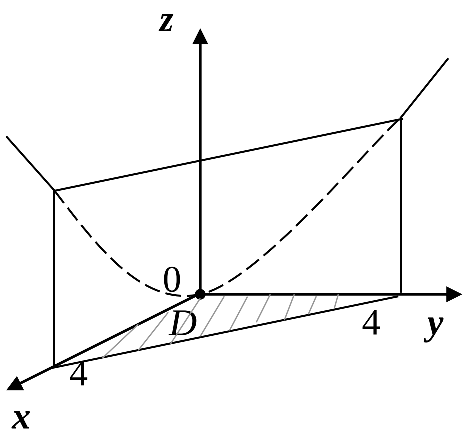


Рис. 3.23

Для обчислень потрібна формула (3.15)

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy\,.$$

В нашому випадку областю σ є трикутник, обмежений прямими $x=0$, $y=0$ та $y=4-x$, а $f(x,\ y)=z=x^2+y^2$.

Тому

$$V=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4-x}\left(x^2+y^2\right)dy.$$

$$I_{\text{вн.}}=\int\limits_0^{4-x}\left(x^2+y^2\right)dy=\int\limits_0^{4-x}x^2dy+\int\limits_0^{4-x}y^2dy=x^2y\Big|_0^{4-x}+\frac{y^3}{3}\Big|_0^{4-x}=$$

$$=x^2(4-x)+\frac{(4-x)^3}{3}=4x^2-x^3+\frac{1}{3}(4-x)^3.$$

$$V=\int\limits_0^4\left(4x^2-x^3+\frac{1}{3}(4-x)^3\right)dx=\frac{4}{3}x^3\Big|_0^4-\frac{x^4}{4}\Big|_0^4-\frac{1}{12}(4-x)^4\Big|_0^4=\frac{128}{3}\ (\textit{куб.од.}).$$

Приклад.

Визначити момент інерції відносно осі Ox пластини D,обмеженої прямими $x=2$, $y=2$ та $y=\frac{x}{2}$, якщо густина пластини в кожній точці є функцією $\rho=x^2+2y$.

Розв'язання.

Зробимо схематичний рисунок.

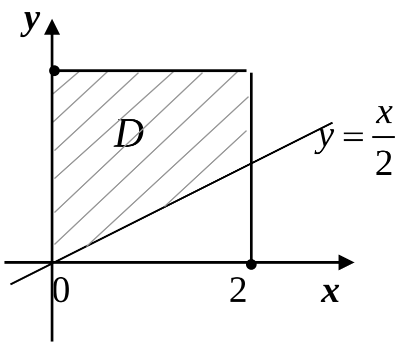


Рис. 3.24

Згідно формули (3.22)

$$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\,dxdy\,.$$

Область D є правильною у напрямі осі Oy:

$$I_x=\iint\limits_D y^2\left(x^2+2y\right)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x/2}^2\left(y^2x^2+2y^3\right)dy;$$

$$I_{\text{вн.}}=\int\limits_{x/2}^2\left(y^2x^2+2y^3\right)dy=\int\limits_{x/2}^2 y^2x^2dy+\int\limits_{x/2}^2 2y^3dy=x^2\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_{x/2}^2+\frac{y^4}{4}\Bigg|_{x/2}^2=$$

$$=\frac{x^2}{3}\left(2^3-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)+\frac{1}{4}\left(2^4-\left(\frac{x}{2}\right)^4\right)=8-\frac{x^5}{24}-\frac{x^4}{32}+\frac{8}{3}x^2.$$

Підставимо отриманий результат у зовнішній інтеграл

$$I_x=\int\limits_0^2\left(8-\frac{x^5}{24}-\frac{x^4}{32}+\frac{8}{3}x^2\right)dx=8x\Bigg|_0^2-\frac{1}{24}\cdot\frac{x^6}{6}\Bigg|_0^2-\frac{1}{32}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2+\frac{8}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{247}{15}.$$

4.3. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Приклад. Обчислити трикратний інтеграл

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_y^0 (x+y+z)dz\,.$$

Розв’язання.

Спочатку обчислимо перший внутрішній інтеграл

$$I_{\text{вн.1}}=\int\limits_y^0 (x+y+z)dz=x\int\limits_y^0 dz+y\int\limits_y^0 dz+\int\limits_y^0 zdz=xz\Bigg|_y^0+yz\Bigg|_y^0+z^2\Bigg|_y^0=-xy-2y^2.$$

Тепер обчислимо другий внутрішній інтеграл

$$I_{\text{вн.2}}=\int\limits_0^x\left(-xy-2y^2\right)dy=-x\int\limits_0^x ydy-2\int\limits_0^x y^2dy=-x\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^x-\frac{2}{3}y^3\Bigg|_0^x=-\frac{7}{6}x^3.$$

Остаточно $$I=\int_0^1\left(-\frac{7}{6}x^3\right)dx=-\frac{7x^4}{24}\Bigg|_0^1=-\frac{7}{24}.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл

$$I=\iiint\limits_V xyzdxdydz,\quad V:\ 0\le x\le 1,\ \ 1\le y\le 3,\ \ 0\le z\le 4.$$

Розв'язання.

Запишемо даний інтеграл як повторний

$$I=\int_0^1 dx\int_1^3 dy\int_0^4 xyzdz,$$

$$\left|\begin{array}{l} I_{\text{вн.}1}=\int_0^4 xyzdz=xy\dfrac{z^2}{2}\Bigg|_0^4=8xy \\ I_{\text{вн.}2}=\int_1^3 8xydy=8x\dfrac{y^2}{2}\Bigg|_1^3=32y \end{array}\right. \Rightarrow\quad I=\int_0^1 32xdx=16x^2\Big|_0^1=16.$$

Зауваження. Завдяки вигляду підінтегральної функції та сталим межам даний інтеграл можна записати ще й так

$$I=\int_0^1 xdx\int_1^3 ydy\int_0^4 zdz=I_3\cdot I_2\cdot I_1;$$

$$I_1=\int_0^4 zdz=\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^4=8,\qquad I_2=\int_1^3 ydy=\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^3=4,\quad I_3=\int_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Тому $\quad I=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8=16.$

4.4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОТРІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$3z=x^2+y^2\quad \text{та}\quad 6z=9-x^2-y^2.$$

Розв'язання.

Дані поверхні є параболоїдами. Врахувавши, що перетином поверхонь є коло $x^2+y^2=3$, одержимо, що вони перетинаються на рівні $3z=3$ або $z=1$. Об'єм нашого тіла буде сумою об'ємів – V_2 тіла, обмеженого поверхнею $6z=9-x^2-y^2$, та V_1 тіла, обмеженого поверхнею $3z=x^2+y^2$.

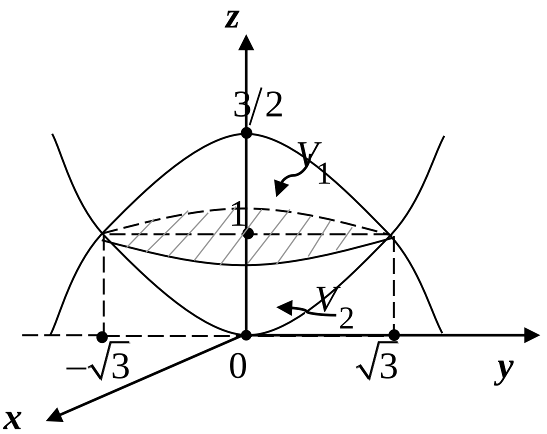


Рис. 3.25

Перейдемо до циліндричних координат $\rho,\ \varphi,\ z$ за формулами $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ z=z$. При цьому $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le\sqrt{3}$. Межі для змінної z будуть $0\le z_1\le\dfrac{\rho^2}{3}$ та $0\le z_2\le\dfrac{3}{2}-\dfrac{\rho^2}{6}$.

Застосуємо формулу (3.37) переходу до циліндричних координат

$$V=V_1+V_2=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{1}dz+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_1^{\frac{3}{2}-\frac{\rho^2}{6}}dz\,.$$

Обчислимо по черзі V_1 та V_2

$$V_1=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\left(1-\frac{\rho^2}{3}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{12}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}d\varphi=\frac{3}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}\pi;$$

$$V_2=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}-\frac{\rho^2}{6}-1\right)\rho d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho^2}{6}\right)\rho d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^3}{6}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}-\frac{\rho^4}{24}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{3}{8}d\varphi=\frac{3}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{4}\pi.$$

Отже, остаточно маємо

$$V=V_1+V_2=\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi=\frac{9}{4}\pi\,(куб.од.).$$

§5. ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

В задачах **1-10** обчислити двократні інтеграли

1. $\int_0^1 dx \int_0^2 3x^2 y dy$;

2. $\int_0^5 dx \int_0^2 \frac{1}{8} x^3 y^4 dy$;

3. $\int_1^2 dy \int_0^1 \left(5x^4 + 3y\right) dx$;

4. $\int_4^9 dy \int_0^2 \left(4x - \sqrt{y}\right) dx$;

5. $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{2x}} ye^x dy$;

6. $\int_0^1 dx \int_0^{x+1} \left(x^2 + y\right) dy$;

7. $\int_1^2 dy \int_0^{y^2} \left(y + 3\sqrt{x}\right) dx$;

8. $\int_1^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} 2y^2 x dx$;

9. $\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \sin\varphi \; d\rho$;

10. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \cos^2\varphi \; d\rho$.

В задачах **11-14** обчислити подвійні інтеграли для заданої області D.

11. $\iint_D xy^2 dxdy$; D: $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 3$.

12. $\iint_D (3x - 4y) dxdy$; D: $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$, $y = 3$.

13. $\iint_D \frac{y}{x} dxdy$; D: $x = 1$, $y = 0$, $x + y = 2$.

14. $\iint_D (x - 2y) dxdy$; D: $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

В задачах **15-18** змінити порядок інтегрування.

15. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{3x+2} f(x;y)dy$.

16. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{5-3x^2} f(x;y)dy$.

17. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{\frac{4-y}{3}}} f(x;y)dx$.

18. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{3-y} f(x;y)dx$.

В задачах **19-24** за допомогою подвійного інтеграла обчислити площі фігур, обмежених лініями.

19. Параболою $y^2 = 4x$ та прямими $y = 0$, $y = 3 - x$.

20. Параболою $y^2 = 2x$ і прямою $y = x$.

21. Параболами $y = x^2$ та $y = 2x - x^2$.

22. Параболою $y = 2 - x^2$ $(x \geq 0)$ та прямими $x = 0$, $y = x$.

23. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 - x\sqrt{2} = 0$.

24. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = xy$.

В задачах **25-28** обчислити об’єми тіл, обмежених поверхнями.

25. $x + y + z = 8$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$.

26. $x + y + z = 2$, $3x + y = 2$, $3x + 2y = 4$, $y = 0$, $z = 0$.

27. $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

28. $z = 0$, $y + z = 2$, $y = x^2$, $x = 0$.

29. Знайти центр мас плоскої однорідної $(\rho = 1)$ фігури, обмеженої лініями:

а) $x^2 + y^2 = r^2$, $x > 0$, $y > 0$; б) $y^2 = 3x$, $y = x$.

30. Обчислити момент інерції:

а) відносно осі Ox площі трикутника, обмеженого прямими $y=2$, $y=\frac{x}{2}$, $x=2$;

б) відносно початку координат площі трикутника, обмеженого лініями $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, $x=0$, $y=0$.

В задачах **31-34** обчислити трикратні інтеграли.

31. $\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^4 xyzdz$.

32. $\int_0^1 dy\int_0^2 dx\int_1^2 (x+y+2z)dz$.

33. $\int_0^2 dy\int_0^y dx\int_1^3 (2z+1)dz$.

34. $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} dy\int_1^2 yzdz$.

В задачах **35-40** обчислити потрійні інтеграли по заданій області V.

35. $\iiint\limits_V x^3y^2zdxdydz$; $V:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le xy$.

36. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$; $V:\ 1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$.

37. $\iiint\limits_V (5+y+2x)dxdydz$. Область V обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y+z-2=0$.

38. $\iiint\limits_V (xy+1)dxdydz$. Область V обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $6x+2y+z-8=0$.

39. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Область V обмежена сферами $x^2+y^2+z^2=4$ та $x^2+y^2+z^2=16$.

40. $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$. Область V обмежена поверхнями $2z=x^2+y^2$ та $z=2$.

В задачах **41-44** за допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити рисунок проекції тіла на площину Oxy.

41. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=4-y^2$, $3x+4y=12$.

42. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=9-x^2$, $x+2y=4$.

43. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $3x+2z=6$, $3x+4y=12$.

44. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $6x+3y+2z=6$, $y=1$.

45. Знайти координати центра мас однорідних тіл, обмежених поверхнями:
а) $x^2+y^2+z^2=16$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$; б) $x+y+z=0$, $z=x^2+y^2$.

Відповіді

1. 2. **2.** 125. **3.** $\frac{11}{2}$. **4.** $\frac{44}{3}$. **5.** $2e^3+1$. **6.** $\frac{7}{4}$. **7.** $\frac{45}{4}$. **8.** $\frac{15}{4}$.
9. 1. **10.** $\frac{2}{3}\pi$. **11.** $\frac{52}{3}$. **12.** -32. **13.** $2\ln 2-\frac{1}{4}$. **14.** $-\frac{2}{3}$. **19.** $\frac{10}{3}$.
20. $\frac{2}{3}$. **21.** $\frac{1}{3}$. **22.** $\frac{7}{6}$. **23.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$. **24.** $\frac{1}{2}$. **25.** 33. **26.** $\frac{4}{9}$. **27.** 8π.
28. $\frac{16\sqrt{2}}{15}$. **29. а)** $x_c=y_c=\frac{4r}{3\pi}$; **б)** $x_c=\frac{6}{5}, y_c=\frac{3}{2}$. **30. а)** $\frac{17}{6}$; **б)** $\frac{13}{2}$. **31.** 8.
32. 9. **33.** 20. **34.** $\frac{7}{4}$. **35.** $\frac{1}{110}$. **36.** $\frac{1}{2}\ln\frac{128}{125}$. **37.** $\frac{14}{27}$. **38.** $\frac{512}{27}$.
39. 48π. **40.** $\frac{16}{3}\pi$. **41.** 16. **42.** $\frac{207}{8}$. **43.** 7,5. **44.** $\frac{7}{8}$.
45. а) $x_c=y_c=z_c=\frac{3}{2}$; **б)** $x_c=y_c=-\frac{1}{2},\ z_c=\frac{5}{6}$.

§6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Обчислити двократний інтеграл:

1.1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^2 x^2 y\,dy$. 1.2. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^2 xy^2\,dx$. 1.3. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sqrt{x}y\,dy$.

1.4. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} x\sqrt{y}\,dx$. 1.5. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{\sqrt{x}} x^3 y\,dy$. 1.6. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^{\sqrt{y}} xy^3\,dx$.

1.7. $\int_{0}^{1} dx \int_{-1}^{x} (x+1)ydy$. 1.8. $\int_{0}^{1} dy \int_{-1}^{y} (y+1)xdx$. 1.9. $\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{2} x(y+1)dy$.

1.10. $\int_{0}^{1} dy \int_{y}^{2} (x+1)ydx$. 1.11. $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x}^{2} x^2dy$. 1.12. $\int_{0}^{1} dy \int_{1-y}^{2} y^2dx$.

1.13. $\int_{0}^{1} dx \int_{\sqrt{x}}^{2} \sqrt{x}y\,dy$. 1.14. $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{2} x\sqrt{y}dx$. 1.15. $\int_{0}^{1} dx \int_{-1}^{2\sqrt{x}} x^2ydy$.

1.16. $\int_{0}^{1} dy \int_{-1}^{2\sqrt{y}} xy^2dx$. 1.17. $\int_{0}^{1} dx \int_{-1}^{\sqrt{x}} (x+1)ydy$. 1.18. $\int_{0}^{1} dy \int_{-1}^{\sqrt{y}} (y+1)xdx$.

1.19. $\int_{0}^{2} dx \int_{x}^{2x} x(y-1)dy$. 1.20. $\int_{0}^{2} dy \int_{y}^{2y} (x-1)ydx$. 1.21. $\int_{0}^{2} dx \int_{\sqrt{x}}^{2x} xydy$.

1.22. $\int_{0}^{2} dy \int_{\sqrt{y}}^{2y} xydx$. 1.23. $\int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{4} x\sqrt{y}dy$. 1.24. $\int_{0}^{1} dy \int_{y^2}^{4} y\sqrt{x}dx$.

1.25. $\int_{0}^{2} dx \int_{-1}^{\sqrt{x}} x^2ydy$. 1.26. $\int_{0}^{2} dy \int_{-1}^{\sqrt{y}} xy^2dx$. 1.27. $\int_{0}^{2} dx \int_{x}^{2} (1-x)ydy$.

1.28. $\int_{0}^{2} dy \int_{y}^{2} (1-y)xdx$. 1.29. $\int_{0}^{1} dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sqrt{x}(y+1)dy$.. 1.30. $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} (x+1)\sqrt{y}dx$..

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл:

а) по прямокутній області σ_1;

б) по області σ_2, що обмежена вказаними лініями.

Зробити рисунок областей інтегрування.

2.1. $\iint\limits_{\sigma} \left(x+3y^2\right)dxdy$,

а) $\sigma_1 : \{0 \le x \le 2;\ \ 0 \le y \le 1\}$;

б) $\sigma_2 : \left\{y = x^2;\ \ y = 2x^2;\ \ x = 2\right\}$.

2.2. $\iint\limits_{\sigma} \left(x^2y+1\right)dxdy$,

а) $\sigma_1 : \{0 \le x \le 3;\ \ 0 \le y \le 2\}$;

б) $\sigma_2 : \{y = x;\ \ y = 2x;\ \ x = 3\}$.

2.3. $\iint\limits_{\sigma}\left(\sqrt{x}+y\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 4;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\left\{y=\frac{\sqrt{x}}{2};\quad y=2\sqrt{x};\quad x=4\right\}$.

2.4. $\iint\limits_{\sigma}\left(3x^2+y\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\{x=y;\quad x=2y;\quad y=2\}$.

2.5. $\iint\limits_{\sigma}\left(\sqrt{y}-2x\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\left\{y=x^2;\quad y=2x^2;\quad x=2\right\}$.

2.6. $\iint\limits_{\sigma}\left(\sqrt{x}\cdot y+1\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 4;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\left\{x=0;\quad x=y^2;\quad y=2\right\}$.

2.7. $\iint\limits_{\sigma}\left(xy^2+2\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\{x=y;\quad x=3y;\quad y=2\}$.

2.8. $\iint\limits_{\sigma}\left(x\sqrt{y}+1\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 4\}$;

б) $\sigma_2:\left\{y=1;\quad y=x^2;\quad x=2\right\}$.

2.9. $\iint\limits_{\sigma}\left(\sqrt{x}+xy\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 4;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\left\{x=0;\quad y=2\sqrt{x};\quad y=2\right\}$.

2.10. $\iint\limits_{\sigma}\left(xy^3-1\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 3;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\{x=3y;\quad x=2y;\quad y=2\}$.

2.11. $\iint\limits_{\sigma}\left(2x+3y^2\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\left\{x=y^2;\quad y=x^2;\quad y=2\right\}$.

2.12. $\iint\limits_{\sigma}\left(6x^2y+1\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 3;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\{x=0;\quad y=4x;\quad y=4\}$.

2.13. $\iint\limits_{\sigma}\left(2\sqrt{x}+y\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 4;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\left\{y=\sqrt{x};\quad y=2\sqrt{x};\quad x=1\right\}$.

2.14. $\iint\limits_{\sigma}\left(3x^2-y\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\{y=x;\quad y=2x;\quad y=3\}$.

2.15. $\iint\limits_{\sigma}\left(3\sqrt{y}+2x\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\left\{y=x^2;\quad y=4x^2;\quad x=1\right\}$.

2.16. $\iint\limits_{\sigma}\left(3\sqrt{x}-y\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 4;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\left\{x=0;\quad y=3\sqrt{x};\quad y=3\right\}$.

2.17. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2y^2+1\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\{y=x;\quad y=2x;\quad x=3\}$.

2.18. $\iint\limits_{\sigma}\left(\sqrt{y}-x\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 4\}$;

б) $\sigma_2:\left\{x=\sqrt{y};\quad x=3\sqrt{y};\quad y=4\right\}$.

2.19. $\iint\limits_{\sigma}\left(\sqrt{x}+y^2\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 4;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\left\{x=y^2;\quad x=3y^2;\quad y=1\right\}$.

2.20. $\iint\limits_{\sigma}\left(xy^2+2\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 3;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\{x=y;\quad x=3y;\quad y=2\}$.

2.21. $\iint\limits_{\sigma}(xy+3)\,dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\left\{y=x^2;\quad y=2x^2;\quad x=1\right\}$.

2.22. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+3y^2\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 3;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\left\{x=0;\quad y=\sqrt{x};\quad y=2\right\}$.

2.23. $\iint\limits_{\sigma}\left(\sqrt{x}-2y\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 4;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\left\{y=\sqrt{x};\quad y=3\sqrt{x};\quad x=1\right\}$.

2.24. $\iint\limits_{\sigma}\left(3x^2-2y\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\left\{x=2y^2;\quad x=3y^2;\quad y=1\right\}$.

2.25. $\iint\limits_{\sigma}\left(\sqrt{y}+x^2\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\left\{y=2;\quad y=2x^2;\quad x=2\right\}$.

2.26. $\iint\limits_{\sigma}\left(\sqrt{x}-y\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 4;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\left\{y=2;\quad y=2\sqrt{x};\quad x=4\right\}$.

2.27. $\iint\limits_{\sigma}\left(3x^2y+2\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\{x=2y;\quad x=4y;\quad y=2\}$.

2.28. $\iint\limits_{\sigma}\left(3\sqrt{y}-2x\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 4\}$;

б) $\sigma_2:\left\{y=3;\quad y=3\sqrt{x};\quad x=4\right\}$.

2.29. $\iint\limits_{\sigma}\left(3\sqrt{x}+y^2\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 4;\quad 0\le y\le 2\}$;

б) $\sigma_2:\left\{x=1;\quad y=\sqrt{x};\quad y=2\right\}$.

2.30. $\iint\limits_{\sigma}\left(4xy^3-1\right)dxdy$,

а) $\sigma_1:\{0\le x\le 3;\quad 0\le y\le 1\}$;

б) $\sigma_2:\left\{x=y^2;\quad x=1;\quad y=2\right\}$.

Завдання 3. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу області σ, обмеженої заданими лініями в прямокутній декартовій системі координат. Зробити рисунок.

3.1. $\begin{cases} y=x^2; \\ x+y=2. \end{cases}$ 3.2. $\begin{cases} y=4-x^2; \\ 2x+y=1. \end{cases}$ 3.3. $\begin{cases} y=x^2-x; \\ y=x+3. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} y=x^2-1; \\ y=x+5. \end{cases}$ 3.5. $\begin{cases} y=x^2+2x; \\ y=8. \end{cases}$ 3.6. $\begin{cases} 2y=x^2; \\ x+y=4. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} y=1-x^2; \\ y=3x-3. \end{cases}$ 3.8. $\begin{cases} y=x^2; \\ 2x+y=3. \end{cases}$ 3.9. $\begin{cases} y=x^2-2x; \\ y=x+4. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} y = x^2 - 4; \\ y = 2x + 4. \end{cases}$ 3.11. $\begin{cases} y = x^2 + x; \\ y = 2. \end{cases}$ 3.12. $\begin{cases} y = x^2; \\ y = 2x + 3. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} y = x^2 - x; \\ y = 3 + x. \end{cases}$ 3.14. $\begin{cases} y = 4 - x^2; \\ y = x - 2. \end{cases}$ 3.15. $\begin{cases} y = x^2; \\ y = x + 6. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} y = x^2 - 3x; \\ y = 4. \end{cases}$ 3.17. $\begin{cases} y = 5 - x^2; \\ y = x - 1. \end{cases}$ 3.18. $\begin{cases} y = x^2; \\ y = 3x + 4. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} y = x^2 - 1; \\ y = 2x + 2. \end{cases}$ 3.20. $\begin{cases} y = x^2 + 2x; \\ y = x + 6. \end{cases}$ 3.21. $\begin{cases} y = x^2 - 4; \\ y = 3x. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} y = 1 - x^2; \\ y = 2x - 2. \end{cases}$ 3.23. $\begin{cases} y = x^2 - x; \\ y = 2. \end{cases}$ 3.24. $\begin{cases} y = x^2; \\ x + y = 6. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} y = 4 - x^2; \\ y = 3x. \end{cases}$ 3.26. $\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ x + y = 6. \end{cases}$ 3.27. $\begin{cases} y = x^2 - 4; \\ y = x + 2. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3; \\ y = 5. \end{cases}$ 3.29. $\begin{cases} y = x^2 - x - 6; \\ y = x - 3. \end{cases}$ 3.30. $\begin{cases} y = x^2 - x - 6; \\ y = x + 2. \end{cases}$

Завдання 4. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу області, обмеженої заданими лініями в полярній системі координат. Зробити рисунок, фрагмент кривої $r = r(\varphi)$ побудувати за точками, надаючи змінній φ значення із заданого проміжку з кроком $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{12}$ $\left(\Delta\varphi = 15^0\right)$.

4.1. $\begin{cases} \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \\ r = 2, \quad r = 5 - 3\cos\varphi. \end{cases}$ 4.2. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi = \dfrac{2\pi}{3}, \\ r = 2, \quad r = 3 + \sin 2\varphi. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{6}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \\ r = 6, \quad r = 3 - 2\cos 3\varphi. \end{cases}$ 4.4. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \\ r = 3, \quad r = 5 + 2\sin 2\varphi. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \\ r = 4, \quad r = 2(1 + \cos 2\varphi). \end{cases}$ 4.6. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{3}, \quad \varphi = \dfrac{3\pi}{4}, \\ r = 4, \quad r = 2(1 - \sin 3\varphi). \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, & \varphi = \dfrac{3\pi}{4}, \\ r = 2, & r = 5 - 2\sin\varphi. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{6}, & \varphi = \dfrac{2\pi}{3}, \\ r = 2, & r = 3 + 2\cos 2\varphi. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{3}, & \varphi = \dfrac{5\pi}{3}, \\ r = 1, & r = 3 - \sin 3\varphi. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{3}, & \varphi = \pi, \\ r = 2, & r = 4 + \cos\varphi. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{6}, & \varphi = \dfrac{5\pi}{6}, \\ r = 3, & r = 2 - \cos 3\varphi. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, & \varphi = \pi, \\ r = 3, & r = 5 + \sin\varphi. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} \varphi = 0, & \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \\ r = 2, & r = 3 - \cos 2\varphi. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{6}, & \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \\ r = 3, & r = 3 + 2\sin 3\varphi. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, & \varphi = \dfrac{5\pi}{3}, \\ r = 4, & r = 2(1 + \cos\varphi). \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, & \varphi = \dfrac{3\pi}{4}, \\ r = 4, & r = 2(1 - \sin 2\varphi). \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{6}, & \varphi = \dfrac{5\pi}{6}, \\ r = 5, & r = 3 - \sin 3\varphi. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{3}, & \varphi = \dfrac{5\pi}{3}, \\ r = 2, & r = 5 + 2\cos\varphi. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, & \varphi = \dfrac{3\pi}{4}, \\ r = 1, & r = 3 - \sin 2\varphi. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{6}, & \varphi = \pi, \\ r = 4, & r = 2 + \cos 3\varphi. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} \varphi = 0, & \varphi = \pi, \\ r = 3, & r = 2 - \cos\varphi. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{6}, & \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \\ r = 2, & r = 3 + \sin 3\varphi. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, & \varphi = \pi, \\ r = 2, & r = 5 - 2\cos\varphi. \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, & \varphi = \dfrac{3\pi}{2}, \\ r = 5, & r = 3 + 2\sin 2\varphi. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{3}, \quad \varphi = \dfrac{5\pi}{3}, \\ r = 5, \quad r = 2(1+\cos 3\varphi). \end{cases}$ **4.26.** $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi = \dfrac{5\pi}{4}, \\ r = 6, \quad r = 2(2-\sin\varphi). \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi = \dfrac{3\pi}{4}, \\ r = 1, \quad r = 3 - 2\sin 2\varphi. \end{cases}$ **4.28.** $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{3}, \quad \varphi = \dfrac{2\pi}{3}, \\ r = 1, \quad r = 3 + 2\cos 3\varphi. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi = \pi, \\ r = 5, \quad r = 4 - \sin\varphi. \end{cases}$ 4.30. $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{6}, \quad \varphi = \dfrac{2\pi}{3}, \\ r = 4, \quad r = 2 + \cos 2\varphi. \end{cases}$

Завдання 5. Обчислити трикратні інтеграли.

5.1. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^y dx \int\limits_0^x (x+2z)\,dz$. 5.2. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^2 (xy+z)\,dz$. 5.3. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^y dx \int\limits_0^2 (xz+2)\,dz$.

5.4. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_1^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1+2y}} (xy+z)\,dz$. 5.5. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_1^y dx \int\limits_0^{\sqrt{2x}} y^2 z\,dz$.

5.6. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_1^x dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} \left(\sqrt{y}+2z\right)dz$. 5.7. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_1^y dx \int\limits_0^{y^2} x\sqrt{z}\,dz$. 5.8. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_1^x dy \int\limits_0^y (y+2z)\,dz$.

5.9. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{y}} \left(\sqrt{y}+xz\right)dz$. 5.10. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_1^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{2y} (2x+z)\,dz$.

5.11. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_1^y dx \int\limits_0^{2\sqrt{x}} xz\,dz$. 5.12. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_1^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{2\sqrt{y}} x^2 z\,dz$. 5.13. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^y dx \int\limits_0^{\sqrt{1+2x}} x^2 z\,dz$.

5.14. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} \left(x\sqrt{y}+2z\right)dz$. 5.15. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^y (x+2z)\,dz$.

5.16. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{0}^{2\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} + 2yz\right) dz$.

5.17. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} dx \int\limits_{0}^{2\sqrt{y+1}} xyz\, dz$.

5.18. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{y} \left(x^2 + 2z\right) dz$.

5.19. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{y} dx \int\limits_{0}^{x} \left(2y + 3z^2\right) dz$.

5.20. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{1}^{\sqrt{x}} dy \int\limits_{0}^{2\sqrt{x}} y^2 z dz$.

5.21. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{y} dx \int\limits_{0}^{2\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} y + z\right) dz$.

5.22. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{1}^{x} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} z\sqrt{x} dz$.

5.23. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{y} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1+x}} y^2 z dz$.

5.24. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1+2y}} x^2 y dz$.

5.25. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1}^{y} dx \int\limits_{0}^{x} (3x + 2y) dz$.

5.26. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{x^2} \left(2y + 3\sqrt{z}\right) dz$.

5.27. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} dx \int\limits_{0}^{9x^2} \sqrt{z}\, dz$.

5.28. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{1}^{x} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} + 2yz\right) dz$.

5.29. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{2y} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} \left(\sqrt{y} + 2xz\right) dz$.

5.30. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{1}^{x} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} \sqrt{x} y z^2\, dz$.

Завдання 6. За допомогою потрійного інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого заданими площинами. Зробити рисунки:
а) самого тіла; б) його проекції на координатну площину Oxy.

6.1. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $2x + 3y = 6$; $2x + 3z = 6$.

6.2. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x + 2y = 4$; $y + z = 2$.

6.3. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $2x + y = 4$; $2x + 3z = 6$.

6.4. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $2x + 3y = 6$; $2y + 3z = 6$.

6.5. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $3x + y = 3$; $x + z = 2$.

6.6. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $2x+y=4$; $y+2z=4$.

6.7. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $3x+2y=6$; $x+2z=2$.

6.8. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $2x+3y=6$; $y+z=2$.

6.9. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $x+2y=6$; $x+2z=6$.

6.10. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $3x+y=6$; $2y+3z=6$.

6.11. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $2x+3y=6$; $x+z=3$.

6.12. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $x+2y=4$; $2x+3z=6$.

6.13. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $2x+y=4$; $x+z=2$.

6.14. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $3x+2y=6$; $y+2z=4$.

6.15. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $3x+y=3$; $2x+z=2$.

6.16. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $2x+3y=6$; $y+z=3$.

6.17. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $3x+2y=6$; $x+z=3$.

6.18. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $3x+y=3$; $y+2z=4$.

6.19. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $x+2y=4$; $x+z=4$.

6.20. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $x+3y=3$; $2y+z=2$.

6.21. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $3x+y=3$; $2x+z=6$.

6.22. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $x+2y=4$; $y+z=3$.

6.23. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $2x+y=4$; $x+z=4$.

6.24. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $3x+y=3$; $y+z=6$.

6.25. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $2x+3y=6$; $x+2z=4$.

6.26. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $3x+y=3$; $y+z=4$.

6.27. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $2x+y=4$; $x+z=4$.

6.28. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $x+2y=2$; $y+z=2$.

6.29. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $x+3y=3$; $2x+z=6$.

6.30. $x=0$, $y=0$, $z=0$; $2x+3y=6$; $y+z=6$.

Розділ IV. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

§1. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ (ПО ДОВЖИНІ ДУГИ)

1.1. ЗАДАЧА, ЩО ПРИВОДИТЬ ДО ПОНЯТТЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПЕРШОГО РОДУ

Задача про масу дуги

Існує аналогія між способом побудови зазначеного інтеграла та способом введення як визначеного інтеграла, так і кратних інтегралів.

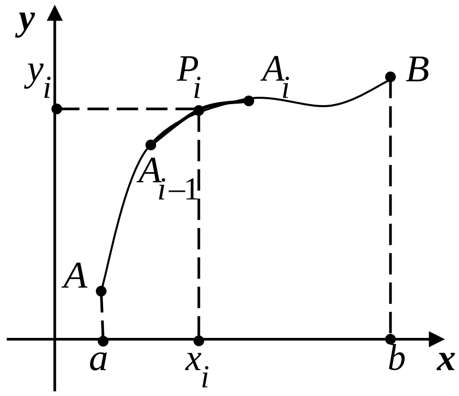


Рис. 4.1

У площині Oxy розглянемо дугу $\overset{\cup}{AB}$, задану рівнянням $y=\varphi(x)$, $x\in[a,\ b]$. Нехай вздовж цієї дуги розподілено масу зі змінною густиною $\rho=f(x,\ y)$. Знайдемо масу всієї дуги.

Виконаємо дії, аналогічні тим, які ми робили при виведенні подвійного та потрійного інтеграла, а саме:

1. Розіб'ємо дугу $\overset{\cup}{AB}$ точками $A_0=A,\ A_1,\ \dots\ ,\ A_n=B$ на n елементарних частин, які позначимо через Δl_i, $\Delta l_i=\overset{\cup}{A_iA_{i-1}}$.

2. Всередині кожної елементарної дуги Δl_i виберемо точку $P_i(x_i;\ y_i)$ і обчислимо густину ρ: $\rho_i=f(P_i)=f(x_i;\ y_i)$.

Вважатимемо густину кожної елементарної дуги Δl_i сталою і рівною $\rho_i=f(x_i;\ y_i)$. Тоді маса Δm_i цієї дуги наближено буде рівною $\Delta m_i\approx\rho_i\cdot\Delta l_i=f(x_i;\ y_i)\cdot\Delta l_i$.

3. Маса всієї дуги $\overset{\cup}{AB}$

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(x_i;\ y_i)\cdot\Delta l_i. \tag{4.1}$$

Позначимо $\lambda=\max\Delta l_i,\ i=\overline{1,n}$. За точне значення маси шуканої дуги приймемо границю суми (4.1), коли $\lambda\to0$ і кожна елементарна дуга Δl_i стягується у точку ($n\to\infty$).

Побудована сума (4.1) називається ***інтегральною сумою***, складеною для функції $f(x,\ y)$ на дузі $\overset{\cup}{AB}$ з рівнянням $y=\varphi(x)$.

Означення. Якщо границя суми (4.1) існує і не залежить ні від способу розбиття дуги на малі частини Δl_i, ні від вибору точок $P_i(x_i;\ y_i)$ на кожній з них, то така границя називається ***криволінійним інтегралом першого роду*** або ***криволінійним інтегралом по довжині дуги*** і позначається

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x;y)\,dl=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot\Delta l_i\ . \tag{4.2}$$

Умовою існування криволінійного інтеграла першого роду є неперервність функції $f(x,\ y)$ та неперервна диференційовність функції $y=\varphi(x)$ для всіх $a\le x\le b$.

Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду

Властивості даного інтеграла аналогічні властивостям подвійного інтеграла. Основними є наступні:

1°. $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,\ y)dl=\int\limits_{\overset{\cup}{BA}} f(x,\ y)dl$, тобто інтеграл не залежить від вибору напряму інтегрування по дузі $\overset{\cup}{AB}$.

2°. $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \left(c_1 f_1(x,\ y)+c_2 f_2(x,\ y)\right)dl=c_1\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f_1(x,\ y)dl+c_2\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f_2(x,\ y)dl$.

3°. *Властивість адитивності.* Якщо точка C належить дузі $\overset{\cup}{AB}$, тоді

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,\ y)dl=\int\limits_{\overset{\cup}{AC}} f(x,\ y)dl+\int\limits_{\overset{\cup}{CB}} f(x,\ y)dl\ .$$

1.2. ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПЕРШОГО РОДУ

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

1. Якщо дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана в декартовій системі координат рівнянням $y=\varphi(x),\ x\in[a,\ b]$, то, як було показано у другому розділі,

$dl = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx = \sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}dx$, тоді

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,\ y)dl = \int\limits_a^b f\left(x;\ \varphi(x)\right)\cdot\sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}dx}. \tag{4.3}$$

2. Якщо дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t)$, $t \in \left[t_1,\ t_2\right],\ dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$, тоді

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,\ y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t);\ y(t)\right)\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt}. \tag{4.4}$$

Зауваження. Криволінійні інтеграли першого роду можна розглядати для просторової дуги $\overset{\cup}{AB}$, заданої рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in \left[t_1,\ t_2\right]$, на якій визначена неперервна функція $f(x,\ y,\ z)$. Для цього випадку, за умови неперервності функцій $x'(t),\ y'(t),\ z'(t),\ t \in \left[t_1,\ t_2\right]$, маємо

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,\ y,\ z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t);\ y(t);\ z(t)\right)\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt}. \tag{4.5}$$

1.3. ЗАСТОСУВАННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПЕРШОГО РОДУ

1. Якщо $\rho = f(x,\ y) \equiv 1$ на цій дузі $\overset{\cup}{AB}$, то криволінійний інтеграл першого роду виражає довжину дуги $\overset{\cup}{AB}$

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} dl = l}. \tag{4.6}$$

В цьому полягає *геометричний зміст* криволінійного інтеграла першого роду.

2. Із розглянутої на початку розділу задачі бачимо, що *фізичний зміст* криволінійного інтеграла першого роду – це маса дуги $y = \varphi(x)$, яка має змінну густину $\rho = f(x,\ y)$

$$\boxed{m = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,\ y)\,dl}\,. \tag{4.7}$$

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x-y)\,dl$, якщо дугою є відрізок, який з'єднує точки $A(0;\ 0)$ та $B(4;\ 3)$.

Розв'язання.

Знайдемо рівняння прямої AB за формулою $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Маємо $\dfrac{x-0}{4-0} = \dfrac{y-0}{3-0}$ або $y = \dfrac{3}{4}x$; $y' = \dfrac{3}{4}$.

Тепер визначимо елемент дуги dl

$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx = \frac{5}{4}dx.$$

За формулою (4.3) отримаємо

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (x-y)\,dl = \int\limits_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\frac{5}{4}dx = \frac{5}{16}\int\limits_0^4 x\,dx = \frac{5}{32}x^2\Big|_0^4 = \frac{5}{2}.$$

Приклад 2. Знайти масу частини дуги $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0,\ \pi]$, якщо задана густина у кожній її точці $\rho(x,\ y) = y$.

Розв'язання.

Із формули (4.7) маємо $m = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,\ y)\,dl$.

Крім того, згідно з формулою (4.4) для дуги, заданої параметричними рівняннями, $dl = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\,dt = dt$

і тому $$m = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} y\,dl = \int\limits_0^{\pi} \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^{\pi} = 2.$$

§2. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ (ПО КООРДИНАТАХ)

2.1. ЗАДАЧА, ЩО ПРИВОДИТЬ ДО ПОНЯТТЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ДРУГОГО РОДУ

Задача про роботу силового поля

Нагадаємо, що силове поле належить до векторних полів, тобто таких, у яких кожній точці відповідає деякий вектор.

Нехай задано плоске силове поле в деякій області σ площини Oxy. На кожну матеріальну точку цієї області діє сила $\vec{F}$, яка залежить від положення (координат) точки $\vec{F} = \vec{F}(x,\ y)$. Оскільки сила $\vec{F}$ є вектором, то її можна розкласти за координатним базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$

$$\vec{F}(x,\ y) = P(x,\ y)\vec{i} + Q(x,\ y)\vec{j},$$

де $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ – проекції сили на осі координат.

Нехай під дією цієї сили матеріальна точка переміщується вздовж деякої дуги $\overset{\cup}{AB}$ області σ. Знайдемо роботу силового поля $\vec{F}$ вздовж дуги $\overset{\cup}{AB}$. Якби сила $\vec{F}$ не змінювалася під час руху по дузі, а дуга $\overset{\cup}{AB}$ була прямолінійним шляхом $\vec{S}$, то робота обчислювалася б як скалярний добуток

$$\boxed{A = \vec{F} \cdot \vec{S}}. \qquad (4.8)$$

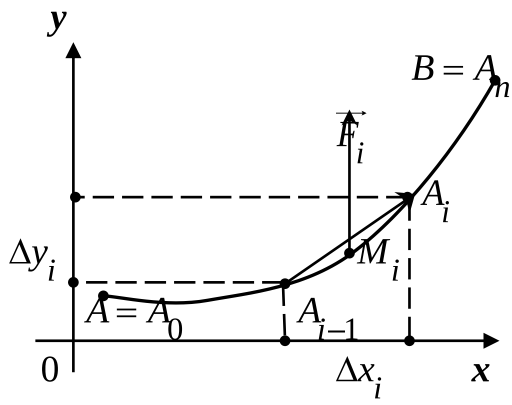


Рис. 4.2

У нашому випадку формулу (4.8) застосовувати не можна. Тому ми міркуватимемо наступним чином:

1. Розіб'ємо $\overset{\cup}{AB}$ точками $A = A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n = B$ на n елементарних частин $\Delta\overset{\cup}{A_i}$ і впишемо в нашу криву ламану, яка з'єднує ці точки.

2. Всередині кожної елементарної дуги $\Delta\overset{\cup}{A_i} = \overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ виберемо точку M_i з координатами $\left(x_i;\ y_i\right)$ і обчислимо в ній силу $\vec{F}$, $\vec{F_i} = P\left(x_i;\ y_i\right)\vec{i} + Q\left(x_i;\ y_i\right)\vec{j}$.

Будемо вважати силу, прикладену до кожної точки дуги $\Delta\overset{\cup}{A_i}$, сталою і рівною $\vec{F_i}$, а шлях ламаної $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ замінимо на рух вздовж відрізка $A_{i-1}A_i$, тобто вектор руху $\overrightarrow{\Delta S_i} = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. Враховуючи, що $\overrightarrow{\Delta S_i} = \left(\Delta x_i;\ \Delta y_i\right)$, можна записати наближений вираз для елементарної роботи ΔA_i, спираючись на формулу (4.8),

$$\Delta A_i \approx \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{\Delta S_i} = P\left(x_i;\ y_i\right)\Delta x_i + Q\left(x_i;\ y_i\right)\Delta y_i .$$

3. Вся робота очевидно є сумою всіх елементарних робіт

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} \left(P\left(x_i;\ y_i\right)\Delta x_i + Q\left(x_i;\ y_i\right)\Delta y_i\right). \qquad (4.9)$$

Сума (4.9) називається ***інтегральною сумою для функцій*** $P(x,\ y)$ та $Q(x,\ y)$ по координатах дуги $\overset{\cup}{AB}$.

За точне значення роботи приймаємо границю суми (4.9), коли $n \to \infty$ і довжини дуг прямують до нуля (дуги стягуються в точку).

Означення. Якщо границя (4.9) існує і не залежить ні від способу розбиття дуги на елементарні частини, ні від вибору точок $M_i\left(x_i;\ y_i\right)$ всередині кожної з них, то така границя називається ***криволінійним інтегралом другого роду*** або ***криволінійним інтегралом по координатах***.

Умовою існування криволінійного інтеграла другого роду є неперервність функції $\vec{F} = P\left(x,\ y\right)\vec{i} + Q\left(x,\ y\right)\vec{j}$ та неперервна диференційовність функції, яка задає дугу $\overset{\cup}{AB}$.

Позначається криволінійний інтеграл другого роду так:

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P\left(x,\ y\right)dx + Q\left(x,\ y\right)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(P\left(x_i;\ y_i\right)\Delta x_i + Q\left(x_i;\ y_i\right)\Delta y_i\right).} \qquad (4.10)$$

Інтеграл (4.10) можна узагальнити на випадок просторового силового поля. Він матиме вигляд:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P\left(x,\ y,\ z\right)dx + Q\left(x,\ y,\ z\right)dy + R\left(x,\ y,\ z\right)dz = \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(P\left(x_i; y_i; z_i\right)\Delta x_i + Q\left(x_i; y_i; z_i\right)\Delta y_i + R\left(x_i; y_i; z_i\right)\Delta z_i\right).\end{aligned}} \qquad (4.11)$$

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

1°. Якщо дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана в декартовій системі координат рівнянням $y=\varphi(x),\ x\in[a,\ b]$, то $dy=\varphi'(x)dx$ і

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=\int\limits_a^b P\big(x;\ \varphi(x)\big)dx+Q\big(x;\ \varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)dx}. \quad (4.12)$$

2°. Якщо дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана параметричними рівняннями $x=x(t),\ y=y(t)$, $t\in\left[t_1,\ t_2\right]$, то $dx=x'(t),\ dy=y'(t)dt$, тоді

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(P\big(x(t);y(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t);y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)dt}. \quad (4.13)$$

Формулу (4.13) можна узагальнити на випадок просторової дуги $\overset{\cup}{AB}$, заданої параметричними рівняннями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in\left[t_1,\ t_2\right]$,

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,\ y,\ z)dx+Q(x,\ y,\ z)dy+R(x,\ y,\ z)dz=\\&=\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(P\big(x(t);y(t);z(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t);y(t)\big)\cdot y'(t)+R\big(x(t);y(t)\big)\cdot z'(t)\Big)dt.\end{aligned}} \quad (4.14)$$

§3. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПО ЗАМКНЕНОМУ КОНТУРУ

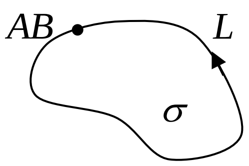


Рис. 4.3

Якщо точка A дуги $\overset{\cup}{AB}$ співпадає з точкою B, маємо замкнений контур. Рух вздовж цього контуру вважається ***додатним***, якщо при цьому область замикається зліва. Криволінійний інтеграл другого роду в цьому випадку позначається так

$$\oint\limits_L P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy. \quad (4.15)$$

Якщо функції $P(x,\ y)$ та $Q(x,\ y)$ мають неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в області σ, яка обмежена контуром L, то має місце формула, яка називається ***формулою Гріна*** або, іноді, ***формулою Остроградського-Гріна***

$$\boxed{\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\oint_{L}P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy}. \tag{4.16}$$

Мається на увазі, що контур L проходиться у додатному напрямі. Ця формула зводить кратні інтеграли до криволінійних і навпаки. З неї випливає *умова рівності нулю* інтеграла у правій частині формули (4.16), а саме:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{4.17}$$

За цією умовою $\oint\limits_{L}P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0$ – інтеграл по замкненому контуру дорівнює нулю.

Якщо контур не є замкненим, а умова (4.17) виконується, то криволінійний інтеграл другого роду не залежить від форми дуги $\overset{\cup}{AB}$, а залежить тільки від координат початкової та кінцевої точок.

Зауваження. Площу області σ, обмеженої замкненою кривою L, можна знайти за формулою

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\oint_{L}xdy-ydx}. \tag{4.18}$$

Приклад 3. Переконатися, що результат інтегрування не залежить від форми шляху інтегрування і обчислити інтеграл

$$\int\limits_{(1;\ 1)}^{(2;\ 3)}\left(3x^2y-y^2\right)dx+\left(x^3-2xy\right)dy=I.$$

<u>*Розв'язання.*</u>

В заданому інтегралі $P=3x^2y-y^2$, $Q=x^3-2xy$.

Обчислимо $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - 2y$ та $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - 2y$.

Оскільки $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, то результат інтегрування не залежить від форми шляху інтегрування, тобто від лінії, що сполучає точки $A(1;\ 1)$ і $B(2;\ 3)$.

Оберемо шлях інтегрування у вигляді ламаної ACB (рис. 4.4), де $C(2;\ 1)$, а ланки паралельні координатним осям:

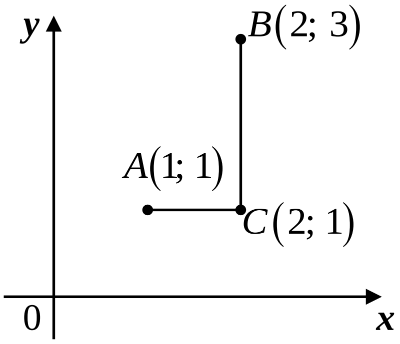


Рис. 4.4

– $AC \parallel Ox$ і лежить на прямій $y = 1$;
– $CB \parallel Oy$ і лежить на прямій $x = 2$.

Тоді $I = \int\limits_{AC} \ldots + \int\limits_{CB} \ldots = I_1 + I_2$.

$$I_1 = \int\limits_{AC} \left(3x^2 y - y^2\right)dx + \left(x^3 - 2xy\right)dy = \begin{bmatrix} AC:\ y = 1;\ dy = 0 \\ 1 \le x \le 2 \end{bmatrix} = \int\limits_1^2 \left(3x^2 - 1\right)dx =$$

$$= \left(3 \cdot \frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_1^2 = (8-2) - (1-1) = 6.$$

$$I_2 = \int\limits_{CB} \left(3x^2 y - y^2\right)dx + \left(x^3 - 2xy\right)dy = \begin{bmatrix} CB:\ x = 2;\ dx = 0 \\ 1 \le y \le 3 \end{bmatrix} = \int\limits_1^3 (8 - 4y)dy =$$

$$= \left(8y - 4 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = (24 - 18) - (8 - 2) = 6 - 6 = 0.$$

Таким чином, $I = I_1 + I_2 = 6 + 0 = 6$.

§4. ТИПОВІ ЗАДАЧІ З РОЗВ'ЯЗАННЯМ

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} xy^2 dl,$$

якщо:

1) $\overset{\cup}{AB}$ – частина кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\overset{\cup}{AB}$ – відрізок прямої $y = 2x + 3$ між точками $A(0;\ 3)$ і $B(2;\ 7)$.

Розв'язання.

1) Контур інтегрування $\overset{\cup}{AB}$ задано параметричними рівняннями, тому для обчислення інтеграла використаємо формулу (4.4).

Знайдемо $\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}$: $\quad \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_t' = -2\sin t \\ y_t' = 2\cos t \end{cases};$

$$\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2} = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{4\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = \sqrt{4 \cdot 1} = 2.$$

Отже, підставивши в формулу отримаємо

$$\int\limits_{AB} xy^2 dl = \int\limits_0^{\pi/2} 2\cos t\left(2\sin t\right)^2 \cdot 2dt = 16\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos t dt = 16 \cdot \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{16}{3}\left(\sin^3\frac{\pi}{2} - \sin^3 0\right) = \frac{16}{3}(1-0) = \frac{16}{3}.$$

2) Контур інтегрування $\overset{\cup}{AB}$ задано рівнянням $y = 2x + 3$, де $0 \le x \le 2$, тому для обчислення інтеграла використаємо формулу (4.3).

Оскільки $y_x' = 2$, то $\sqrt{1 + \left(y_x'\right)^2} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$. Отже,

$$\int\limits_{AB} xy^2 dl = \int\limits_0^2 x(2x+3)^2\sqrt{5}dx = \sqrt{5}\int\limits_0^2 x\left(4x^2 + 12x + 9\right)dx = \sqrt{5}\int\limits_0^2 \left(4x^3 + 12x^2 + 9x\right)dx =$$

$$= \sqrt{5}\left(4 \cdot \frac{x^4}{4} + 12 \cdot \frac{x^3}{3} + 9 \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \sqrt{5}\left(x^4 + 4x^3 + \frac{9}{2}x^2\right)\Bigg|_0^2 = \sqrt{5}(16 + 32 + 18) = 66\sqrt{5}.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} x\sqrt{1+x}\,dl,$$

де AB – дуга кривої $4=\ln x$, обмежена точками, для яких $x_A=1,\ x_B=4$.

Розв'язання.

Знайдемо $y'=\frac{1}{x},\ dl=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx=\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}dx$. Тоді

$$\int\limits_{AB} x\sqrt{1+x^2}dl=\int\limits_1^4 x\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}dx=\int\limits_1^4\left(1+x^2\right)dx=\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=4+\frac{4^3}{3}-1-\frac{1}{3}=3+\frac{63}{3}=\frac{72}{3}=24.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл

$\int\limits_L xydl$, де L – дуга кривої $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

Знаходимо похідні

$x'=-a\sin t,\ y'=a\cos t,\ z'=b$, тоді

$$dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}dxdydz=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}dt=$$

$$=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}dt;$$

$$\int\limits_L xydl=\int\limits_0^{\pi/2} a\cos t\,a\sin t\sqrt{a^2+b^2}dt=a^2\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\cos t dt=$$

$$=a^2\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\,d\sin t=a^2\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{a^2}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy$$

по шляхам, що з'єднують точки $A(0;\ 0)$ і $B(1;\ 1)$:

1) пряма $y = x$; 2) парабола $y = x^2$; 3) кубічна парабола $y = x^3$.

Розв'язання.

1) $y = x$, $dy = dx$:

$$\int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = \int\limits_0^1 \left(x^2 + x^2 + 2x^2\right)dx = 4\int\limits_0^1 x^2dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{4}{3};$$

2) $y = x^2$, $dy = 2xdx$:

$$\int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = \int\limits_0^1 \left(x^2 + x^4 + 4x^4\right)dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 5x^4\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3};$$

3) $y = x^3$, $dy = 3x^2dx$:

$$\int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = \int\limits_0^1 \left(x^2 + x^6 + 6x^6\right)dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 7x^6\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^7\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} xdx + ydy + (x + y - 1)dz,$$

де (AB) – відрізок прямої від точки $A(1;\ 1;\ 1)$ до точки $B(2;\ 3;\ 4)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої (AB): $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ або $y = 2x - 1$, $z = 3x - 2$.

Знаходимо $dy = 2dx$, $dz = 3dx$. Отже,

$$\int\limits_{AB} xdx + ydy + (x + y - 1)dz = \int\limits_1^2 \big(x + (2x-1)\cdot 2 + (x + 2x - 2)\cdot 3\big)dx = \int\limits_1^2 (14x - 8)dx =$$

$$= \left(7x^2 - 8x\right)\Big|_1^2 = 7\cdot(4-1) - 8\cdot(2-1) = 21 - 8 = 13.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy, \quad \text{якщо } (AB){:}\ \ x = 4\cos t,\ y = 3\sin t.$$

Розв'язання.

Знаходимо $dx = -4\sin t dt$, $dy = 3\cos t dt$. Отже,

$$\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy = \int\limits_0^\pi \left(9\sin^2 t(-4\sin t) + 16\cos^2 t\, 3\cos t\right)dt = \int\limits_0^\pi \left(-36\sin^3 t + 48\cos^3 t\right)dt =$$

$$= -36\int\limits_0^\pi \sin^3 t dt + 48\int\limits_0^\pi \cos^3 t dt = -36\cdot I_1 + 48\cdot I_2;$$

$$I_1 = \int\limits_0^\pi \sin^3 t dt = \int\limits_0^\pi \sin^2 t \sin t dt = -\int\limits_0^\pi \left(1 - \cos^2 t\right)d(\cos t) = -\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3};$$

$$I_2 = \int\limits_0^\pi \cos^3 t dt = \int\limits_0^\pi \cos^2 t \cos t dt = \int\limits_0^\pi \left(1 - \sin^2 t\right)d(\sin t) = \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^\pi = 0.$$

Остаточно отримаємо

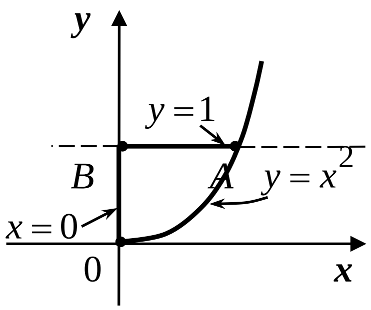
$$\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy = -36\cdot\frac{4}{3} + 48\cdot 0 = -48.$$

Приклади.

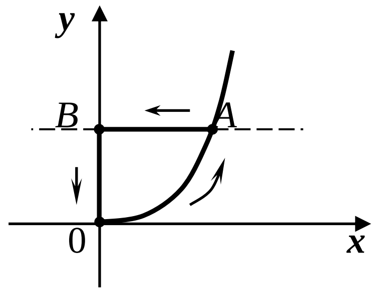
1) Обчислити інтеграл $\int\limits_L y^2dx - xydy$, якщо L – замкнений контур, утворений лініями $y = x^2$, $y = 1$ та $x = 0$;

2) Знайти площу області D, обмеженої контуром L.

Розв'язання



а)



б)

Рис. 4.5

1) За умовою, L – замкнений контур, який складається з фрагментів параболи $y = x^2$ та прямих ліній $y = 1$ і $x = 0$, тобто $L = OA + AB + BO$ (рис. 4.5), де $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 1)$, $B(0;\ 1)$. Тому можемо записати

$$\oint\limits_L y^2dx - xydy = \int\limits_{OA} y^2dx - xydy + \int\limits_{AB} y^2dx - xydy + \int\limits_{BO} y^2dx - xydy = I_1 + I_2 + I_3;$$

$$I_1 = \int\limits_{OA} y^2dx - xydy = \begin{bmatrix} OA:\ y = x^2 \ \Rightarrow \ dy = 2xdx \\ x_O = 0; \quad x_A = 1 \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 \left(\left(x^2\right)^2 - x \cdot x^2 \cdot 2x \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^4 - 2x^4\right) dx = -\int\limits_0^1 x^4 dx = -\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{5};$$

$$I_2 = \int\limits_{AB} y^2dx - xydy = \begin{bmatrix} AB:\ y = 1 \ \Rightarrow \ dy = 0 \\ x_A = 1; \quad x_B = 0 \end{bmatrix} = \int\limits_1^0 1dx = x\bigg|_1^0 = -1;$$

$$I_3 = \int\limits_{BO} y^2dx - xydy = \begin{bmatrix} BO:\ x = 0 \ \Rightarrow \ dx = 0 \\ y_B = 1; \quad y_O = 0 \end{bmatrix} = \int\limits_1^0 0dy = 0;$$

$$\oint_L y^2dx - xydy = -\frac{1}{5} - 1 + 0 = -\frac{6}{5}.$$

2) Використаємо формулу (4.18). Оскільки контур L складається з трьох фрагментів $L = OA + AB + BO$ (рис. 4.5), то

$$S_D = \frac{1}{2}\cdot\oint xdy - ydx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{OA} xdy - ydx + \int_{AB} xdy - ydx + \int_{BO} xdy - ydx\right) = \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2 + I_3\right);$$

$$I_1 = \int_{OA} xdy - ydx = \begin{bmatrix} OA: y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx \\ x_O = 0; \quad x_A = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \left(x\cdot 2x - x^2\right)dx = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$I_2 = \int_{AB} xdy - ydx = \begin{bmatrix} AB:\ y = 1 \Rightarrow dy = 0 \\ x_A = 1; \quad x_B = 0 \end{bmatrix} = \int_1^0 (-1)\,dx = x\Big|_1^0 = 1;$$

$$I_3 = \int_{BO} xdy - ydx = \begin{bmatrix} BO:\ x = 0 \Rightarrow dx = 0 \\ y_B = 1; \quad y_O = 0 \end{bmatrix} = \int_1^0 0dy = 0.$$

З урахуванням знайдених значень $I_1 = \frac{1}{3},\ I_2 = 1,\ I_3 = 0$, отримаємо

$$S_D = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + 1 + 0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\ (кв.од.).$$

§5. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

В задачах **1-15** обчислити криволінійні інтеграли першого роду.

1. $\int_L (x - y)dl$, де L – відрізок прямої $y = 2 - 2x$ між точками $A(1;\ 0)$ і $B(2;\ -2)$;

2. $\int_L (2x + y)dl$, де L – відрізок прямої $y = 2x - 1$ між точками $A(-1;-3)$ і $B(2;3)$;

3. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, де L – відрізок прямої $y=1-3x$ між точками $A(-2;7)$ і $B(1;\,-2)$;

4. $\int\limits_L (2x-y)\,dl$, де L – відрізок прямої $y=1-x$ між точками $A(-1;2)$ і $B(2;\,-1)$;

5. $\int\limits_L (x-2y)\,dl$, де L – відрізок прямої $y=2x-3$ між точками $A(1;-1)$ і $B(2;\,1)$;

6. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, де L – відрізок прямої $y=2-2x$ між точками $A(1;0)$ і $B(2;\,-2)$;

7. $\int\limits_L x^2y^2\,dl$, де L – відрізок прямої $x+y-2=0$ між точками $A(0;\,2)$ і $B(3;\,5)$;

8. $\int\limits_L (y-x)^2\,dl$, де L – відрізок прямої $y=2x+1$ між точками $A(0;1)$ і $B(4;9)$;

9. $\int\limits_L \frac{dl}{(y+5)^2}$, де L – відрізок прямої $2x-y=4$ між точками $A(0;\,-4)$ і $B(2;\,0)$;

10. $\int\limits_L (y+1)^2\,dl$, де L – відрізок прямої $2x-y=2$ між точками $A(0;-2)$ і $B(1;0)$;

11. $\int\limits_L (x-3y)\,dl$, де L – дуга кривої $x=1+2\cos t,\ \ y=2\sin t,\ \ \frac{\pi}{2}\le t\le\pi$;

12. $\int\limits_L xy\,dl$, де L – дуга кривої $x=2\cos t,\ \ y=2\sin t-1,\ \ \frac{\pi}{2}\le t\le\pi$;

13. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, де L – дуга кривої $x=3-2\cos t,\ \ y=1+2\sin t,\ \ -\frac{\pi}{2}\le t\le 0$;

14. $\int\limits_L (x-y)\,dl$, де L – дуга кривої $x=2+\cos t,\ \ y=3-\sin t,\ \ \frac{\pi}{2}\le t\le\pi$;

15. $\int\limits_L (2x-y)\,dl$, де L – дуга кривої $x=1+2\cos t,\ \ y=2-2\sin t,\ \ \frac{\pi}{2}\le t\le\pi$.

В задачах **16-25** обчислити криволінійні інтеграли другого роду.

16. $\int\limits_L (2x+y)\,dx+(x+y)\,dy$:

а) L – пряма $3x+y=2$ між точками $A(1;\ -1)$ і $B(2;\ -4)$;

б) L – ламана ABC, де $A(1;\ -1)$, $B(2;\ -1)$, $C(2;\ 3)$.

17. $\int\limits_L ydx+(2x-y)dy$:

а) L – пряма $x+y=3$ між точками $A(-1;\ -3)$ і $B(2;\ 1)$;

б) L – ламана ABC, де $A(0;\ 1)$, $B(2;\ 1)$, $C(2;\ 4)$.

18. $\int\limits_L (y-x)dx+(2x-y)dy$:

а) L – пряма $x+y=2$ між точками $A(-1;\ 3)$ і $B(1;\ 1)$;

б) L – ламана ABC, де $A(1;\ -1)$, $B(2;\ -1)$, $C(2;\ 3)$.

19. $\int\limits_L (x-y)dx-ydy$:

а) L – пряма $2x+y=2$ між точками $A(-1;\ 2)$ і $B(2;\ -1)$;

б) L – ламана ABC, де $A(1;\ -1)$, $B(1;\ 3)$, $C(2;\ 3)$.

20. $\int\limits_L ydx-(x+2y)dy$:

а) L – пряма $x+y=2$ між точками $A(-1;\ 3)$ і $B(2;\ 0)$;

б) L – ламана ABC, де $A(0;\ -1)$, $B(3;\ -1)$, $C(3;2)$.

21. $\int\limits_L (x+y)dx+x\sqrt{y}dy$:

а) L – дуга параболи $y=4x^2$ між точками $A(0;\ 1)$ і $B(2;\ 9)$;

б) L – ламана ABC, де $A(1;\ -1)$, $B(1;\ 2)$, $C(4;\ 2)$.

22. $\int\limits_L (2x+y)dx-xdy$:

а) L – дуга параболи $y=1-x^2$ між точками $A(0;\ 1)$ і $B(2;\ -3)$;

б) L – ламана ABC, де $A(0;\ -1)$, $B(3;\ -1)$, $C(3;\ 1)$.

23. $\int\limits_L \left(x-y^2\right)dx+\sqrt{x}dy$:

а) L – дуга параболи $x=y^2$ між точками $A(0;\ 0)$ і $B(4;\ 1)$;

б) L – ламана ABC, де $A(2;\ -1)$, $B(2;\ 2)$, $C(4;\ 2)$.

24. $\int\limits_L \left(x^2 - y^2\right)dx + ydy$;

а) L – дуга параболи $y = 3 - x^2$ між точками $A(0;\ 3)$ і $B(2;\ -1)$;

б) L – ламана ABC, де $A(0;\ -1)$, $B(2;\ -1)$, $C(2;\ 3)$.

25. $\int\limits_L \left(y - x^2\right)dx + xdy$;

а) L – дуга параболи $y = 2x^2 + 1$ між точками $A(0;\ 1)$ і $B(2;\ 9)$;

б) L – ламана ABC, де $A(1;\ -1)$, $B(1;\ 3)$, $C(2;\ 3)$.

В задачах **26-35** переконатися, що результат інтегрування не залежить від форми шляху інтегрування та обчислити криволінійні інтеграли другого роду.

26. $\int\limits_{(0;\ 1)}^{(3;\ 2)} 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$.

27. $\int\limits_{(0;\ 1)}^{(2;\ 4)} 3x^2ydx + x^3dy$.

28. $\int\limits_{(0;\ 1)}^{(3;\ 4)} (2x + 3y)dx + 3xdy$.

29. $\int\limits_{(0;\ 1)}^{(3;\ 2)} 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$.

30. $\int\limits_{(0;\ 1)}^{(2;\ 4)} y^3dx + 3xy^2dy$.

31. $\int\limits_{(0;\ 1)}^{(3;\ 4)} 3ydx + (3x + 2y)dy$.

32. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(5;\ 3)} \left(y^4 - 2xy\right)dx + \left(4xy^3 - x^2\right)dy$.

33. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 2)} \left(4xy - y^3\right)dx + \left(2x^2 - 3xy^2\right)dy$.

34. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 2)} \left(2y^3 - 6xy\right)dx + \left(6xy^2 - 3x^2\right)dy$.

35. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(4;\ 2)} \left(4x^3y^3 - y\right)dx + \left(3x^4y^2 - x\right)dy$.

Відповіді

1. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. **2.** $3\sqrt{5}$. **3.** $6\sqrt{10}$. **4.** $\frac{3}{2}\sqrt{2}$. **5.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **7.** $\frac{18\sqrt{2}}{5}$.
8. $\frac{124\sqrt{5}}{3}$. **9.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **10.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **11.** $\pi-16$. **12.** 0. **13.** $4\pi-8$. **14.** $-\frac{\pi}{2}$.
15. –4. **16.** а) $\frac{7}{2}$; б) 14. **17.** а) 12; б) $\frac{13}{2}$. **18.** а) 8; б) $\frac{19}{2}$.
19. а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{11}{2}$. **20.** а) 15; б) -15. **21.** а) $-\frac{154}{3}$; б) $\frac{51}{2}$. **22.** а) $\frac{26}{3}$; б) 0.
23. а) 9; б) $3\sqrt{2}-2$. **24.** а) $-\frac{146}{15}$; б) $\frac{14}{3}$. **25.** а) $\frac{46}{3}$; б) $\frac{14}{3}$. **26.** 108.
27. 32. **28.** 45. **29.** 72. **30.** 128. **31.** 51. **32.** 330. **33.** $\frac{37}{2}$. **34.** –6.
35. 2040.

§6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

1.1. $\int\limits_L xydl$, де L – дуга кола $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

1.2. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x+y}}$, де L – відрізок прямої $3x-y+1=0$ між точками $A(0;1)$ і $B(2;7)$.

1.3. $\int\limits_L xy^2dl$, де L – відрізок прямої $x-y+2=0$ між точками $A(0;\ 2)$ і $B(3;\ 5)$.

1.4. $\int\limits_L y^2dl$, де L – відрізок прямої $2x-y+1=0$ між точками $A(0;\ 1)$ і $B(1;\ 3)$.

1.5. $\int\limits_L xy^2dl$, де L – дуга кола $x=5\cos t$, $y=5\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{6}$.

1.6. $\int\limits_L \sqrt{3x+y}dl$, де L – відрізок прямої $2x+y=4$ між точками $A(0;4)$ і $B(2;\ 0)$.

1.7. $\int\limits_L \frac{dl}{(y-x)^2}$, де L – відрізок прямої $2x-y+1=0$ між точками $A(0;1)$ і $B(2;5)$.

1.8. $\int_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L – відрізок прямої $y=x+2$ між точками $A(0;2)$ і $B(2;4)$.

1.9. $\int_L \frac{y^2}{x}dl$, де L – відрізок прямої $x-y+2=0$ між точками $A(1;\ 3)$ і $B(2;\ 4)$.

1.10. $\int_L x\sqrt{y}dl$, де L – дуга кола $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

1.11. $\int_L \left(x^2+y\right)dl$,де L– відрізок прямої $x-y+2=0$ між точками $A(0;2)$, $B(3;5)$.

1.12. $\int_L \frac{ydl}{x^2}$, де L – відрізок прямої $3x-y+1=0$ між точками $A(1;\ 4)$ і $B(2;\ 7)$.

1.13. $\int_L xydl$, де L – дуга кривої $x=3+2\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{4}$.

1.14. $\int_L x^2ydl$, де L – дуга кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

1.15. $\int_L (x+y)^2\,dl$,де L– відрізок прямої $2x+y=2$ між точками $A(0;2)$ і $B(1;0)$.

1.16. $\int_L \sqrt{y+1}dl$, де L – відрізок прямої $2x-y=2$ між точками $A(0;-2)$ і $B(1;0)$.

1.17. $\int_L \sqrt{x}ydl$, де L – дуга кривої $x=3+\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

1.18. $\int_L x^2ydl$, де L – відрізок прямої $x-y+2=0$ між точками $A(0;2)$ і $B(2;4)$.

1.19. $\int_L (y-x)dl$, де L – дуга кривої $x=5\cos t$, $y=5(1+\sin t)$, $0\le t\le\pi$.

1.20. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{y+5}}$, де L – відрізок прямої $2x-y=4$ між точками $A(0;-4)$ і $B(2;0)$.

1.21. $\int_L x\sqrt{y}dl$, де L – дуга кривої $x=\cos t$, $y=4+\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{6}$.

1.22. $\int_L (x+2y)dl$, де L – дуга кола $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3\pi}{4}$.

1.23. $\int_L \sqrt{x}ydl$, де L – дуга кривої $x=1+3\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

1.24. $\int_L \frac{y^2}{x}dl$, де L – відрізок прямої $x-y+2=0$ між точками $A(1;3)$ і $B(2;4)$.

1.25. $\int_L (2y-x)dl$, де L – дуга кривої $x=3\cos t$, $y=3(1+\sin t)$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

1.26. $\int_L (y-x)^2 dl$, де L – відрізок прямої $2x-y+1=0$ між точками $A(0;1)$ і $B(4;9)$.

1.27. $\int_L xydl$, де L – дуга кривої $x=1+2\cos t$, $y=1-2\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

1.28. $\int_L x^2y^2dl$, де L – відрізок прямої $x-y+2=0$ між точками $A(0;2)$ і $B(3;5)$.

1.29. $\int_L (x-3y)dl$, де L – дуга кривої $x=1+2\cos t$, $y=2\sin t$, $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$.

1.30. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{4x+y}}$, де L – відрізок прямої $3x+y=3$ між точками $A(0;\ 3)$ і $B(1;\ 0)$.

Завдання 2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись в додатному напрямі). Зробити рисунок.

2.1. $\oint_L (2x+y)dx+xydy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=1$, $x+y=3$.

2.2. $\oint_L \left(y^2-3x^2\right)dx+x^2ydy$, де L – контур, утворений лініями $y=0$, $x=2$, $y=2x$.

2.3. $\oint_L \left(y+3x^2\right)dx-xdy$, де L – контур, утворений лініями $x=2$, $y=4$, $y=4-x^2$.

2.4. $\oint_L (2x+y)dx+xydy$, де L – контур, утворений лініями $x=2$, $y=3$, $y=3-x$.

2.5. $\oint\limits_L (x-y)dx + x\sqrt{y}dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=1$, $y=x^2$.

2.6. $\oint\limits_L (2x+y)dx + (x-y)dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=3$, $y=2x+1$.

2.7. $\oint\limits_L (x+y)^2 dx + xdy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=1$, $x=2y^2$.

2.8. $\oint\limits_L (2y+x)dx - ydy$, де L – контур, утворений лініями $x=2$, $y=2$, $y=2-x$.

2.9. $\oint\limits_L (y-x)dx + \left(x^2+y\right)dy$, де L – контур, утворений лініями $y=0$, $x=2$, $y=2x^2$.

2.10. $\oint\limits_L \left(y-2x^2\right)dx - xdy$, де L – контур, утворений лініями $x=2$, $y=4$, $y=4-x^2$.

2.11. $\oint\limits_L (y-x)dx + (x+y)dy$, де L – контур, утворений лініями $x=2$, $y=1$, $y=2x+1$.

2.12. $\oint\limits_L \left(y^2-2x\right)dx + (x+y)dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=2$, $x=y^2$.

2.13. $\oint\limits_L \left(y^2-3x^2\right)dx - x^3dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=3$, $y=3x$.

2.14. $\oint\limits_L \left(x^2+y\right)dx - x^2dy$, де L – контур, утворений лініями $x=2$, $y=1$, $y=x^2+1$.

2.15. $\oint\limits_L (2x+y)dx + xydy$, де L – контур, утворений лініями $x=1$, $y=2$, $y=2x-2$.

2.16. $\oint\limits_L (x+y)dx - x\sqrt{y}dy$, де L – контур, утворений лініями $y=0$, $x=1$,

$y = 4x^2$.

2.17. $\oint\limits_L xydx - (x - 2y)dy$, де L – контур, утворений лініями $x = 0$, $y = 1$, $y = 3 - x$.

2.18. $\oint\limits_L \left(x - 3y^2\right)dx + \frac{x}{y}dy$, де L – контур, утворений лініями $x = 0$, $y = 1$, $x = 4y^2$.

2.19. $\oint\limits_L \left(y - 3x^2\right)dx - x^2ydy$,де L – контур, утворений лініями $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$.

2.20. $\oint\limits_L \left(2x + y^2\right)dx + 3\sqrt{x}dy$, де L – контур, утворений лініями $x = 0$, $y = 2$, $x = y^2$.

2.21. $\oint\limits_L \left(\sqrt{y} + 2x\right)dx + \frac{y}{x}dy$, де L – контур, утворений лініями $x = 1$, $y = 0$, $y = 4x^2$.

2.22. $\oint\limits_L (2x + y)dx + (y - x)dy$, де L – контур, утворений лініями $x = 1$, $y = 0$, $y = 4 - x$.

2.23. $\oint\limits_L \left(y^2 - 3x^2\right)dx + x^2dy$, де L – контур, утворений лініями $y = 4$, $x = 1$, $y = 2x$.

2.24. $\oint\limits_L (x + 2y)dx - ydy$, де L – контур, утворений лініями $y = 2$, $x = 1$, $y = x - 1$.

2.25. $\oint\limits_L \left(y - x^2\right)dx - xdy$, де L – контур, утворений лініями $y = 1$, $x = 1$, $y = 2x^2 + 1$.

2.26. $\oint\limits_L \left(y^2 - 2x\right)dx + xydy$, де L – контур, утворений лініями $x = 1$, $y = 0$, $y = 3x$.

2.27. $\oint\limits_L \left(x-y^2\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}+y\right)dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=2$, $x=2y$.

2.28. $\oint\limits_L y^2dx-xydy$, де L – контур, утворений лініями $x=2$, $y=1$, $y=x+1$.

2.29. $\oint\limits_L (2x+y)dx-xdy$, де L – контур, утворений лініями $y=1$, $x=1$, $y=1-x^2$.

2.30. $\oint\limits_L xydx-(x+y)dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=1$, $y=4-x$.

Завдання 3. Обчислити площу області σ, обмеженої заданими лініями в прямокутній декартовій системі координат, за формулою $S=\dfrac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx$, де L – границя цієї області σ.

3.1. $\begin{cases} y=x^2; \\ x+y=2. \end{cases}$
3.2. $\begin{cases} y=4-x^2; \\ 2x+y=1. \end{cases}$
3.3. $\begin{cases} y=x^2-x; \\ y=x+3. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} y=x^2-1; \\ y=x+5. \end{cases}$
3.5. $\begin{cases} y=x^2+2x; \\ y=8. \end{cases}$
3.6. $\begin{cases} 2y=x^2; \\ x+y=4. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} y=1-x^2; \\ y=3x-3. \end{cases}$
3.8. $\begin{cases} y=x^2; \\ 2x+y=3. \end{cases}$
3.9. $\begin{cases} y=x^2-2x; \\ y=x+4. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} y=x^2-4; \\ y=2x+4. \end{cases}$
3.11. $\begin{cases} y=x^2+x; \\ y=2. \end{cases}$
3.12. $\begin{cases} y=x^2; \\ y=2x+3. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} y=x^2-x; \\ y=3+x. \end{cases}$
3.14. $\begin{cases} y=4-x^2; \\ y=x-2. \end{cases}$
3.15. $\begin{cases} y=x^2; \\ y=x+6. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} y=x^2-3x; \\ y=4. \end{cases}$
3.17. $\begin{cases} y=5-x^2; \\ y=x-1. \end{cases}$
3.18. $\begin{cases} y=x^2; \\ y=3x+4. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} y=x^2-1; \\ y=2x+2. \end{cases}$
3.20. $\begin{cases} y=x^2+2x; \\ y=x+6. \end{cases}$
3.21. $\begin{cases} y=x^2-4; \\ y=3x. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} y=1-x^2; \\ y=2x-2. \end{cases}$
3.23. $\begin{cases} y=x^2-x; \\ y=2. \end{cases}$
3.24. $\begin{cases} y=x^2; \\ x+y=6. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} y = 4 - x^2; \\ y = 3x. \end{cases}$ 3.26. $\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ x + y = 6. \end{cases}$ 3.27. $\begin{cases} y = x^2 - 4; \\ y = x + 2. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3; \\ y = 5. \end{cases}$ 3.29. $\begin{cases} y = x^2 - x - 6; \\ y = x - 3. \end{cases}$ 3.30. $\begin{cases} y = x^2 - x - 6; \\ y = x + 2. \end{cases}$

Завдання 4. Переконатися в тому, що результат інтегрування не залежить від форми контуру інтегрування, та обчислити інтеграл.

4.1. $\displaystyle\int\limits_{(0;\ 1)}^{(2;\ 3)} \left(6x^2y + 3y^2\right)dx + \left(2x^3 + 6xy\right)dy$.

4.2. $\displaystyle\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 2)} \left(6xy + 2y^3\right)dx + \left(3x^2 + 6xy^2\right)dy$.

4.3. $\displaystyle\int\limits_{(0;\ 1)}^{(1;\ 3)} \left(8xy^2 - y^3\right)dx + \left(8x^2y - 3xy^2\right)dy$.

4.4. $\displaystyle\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 2)} \left(2y^3 - 6xy\right)dx + \left(6xy^2 - 3x^2\right)dy$.

4.5. $\displaystyle\int\limits_{(0;\ 1)}^{(1;\ 4)} \left(4x^3y + xy^2\right)dx + \left(x^4 + x^2y\right)dy$.

4.6. $\displaystyle\int\limits_{(1;\ 1)}^{(1;\ 3)} \left(3y^3 + 4x^3y\right)dx + \left(9xy^2 + x^4\right)dy$.

4.7. $\displaystyle\int\limits_{(1;\ 1)}^{(2;\ 4)} \left(3y^3 - 3x^2y\right)dx + \left(6xy - x^3\right)dy$.

4.8. $\displaystyle\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 4)} \left(6xy - 2y^2\right)dx + \left(3x^2 - 4xy\right)dy$.

4.9. $\int\limits_{(0;\ 1)}^{(2;\ 3)} \left(4x^3y+8xy^2\right)dx+\left(x^4+8x^2y\right)dy$.

4.10. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(2;\ 3)} \left(3x^2y+2y^3\right)dx+\left(x^3+6xy^2\right)dy$.

4.11. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 4)} \left(6x^2y+3y^2\right)dx+\left(2x^3+6xy\right)dy$.

4.12. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 2)} \left(3x^2y-3y^2\right)dx+\left(x^3-6xy\right)dy$.

4.13. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 2)} \left(4xy-y^3\right)dx+\left(2x^2-3xy^2\right)dy$.

4.14. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(2;\ 4)} \left(3x^2y^2-y^4\right)dx+\left(2x^3y-4xy^3\right)dy$.

4.15. $\int\limits_{(1;\ 1)}^{(2;\ 5)} \left(2xy^2-y\right)dx+\left(2x^2y-x\right)dy$.

Розділ V. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

§1. ПОНЯТТЯ ПРО КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

1.1. Алгебраїчна форма комплексного числа

Комплексним числом називається вираз:

$$z = a + b \cdot i \,, \tag{5.1}$$

де a та b – дійсні числа, а символ i – *уявна одиниця*, яка визначається умовою: $i^2 = -1$. При цьому число a називається *дійсною частиною комплексного числа* z і позначається: $a = \operatorname{Re} z$, а b – *уявною частиною* z, $b = \operatorname{Im} z$ (від французьких слів: reel – дійсний, imaginaire – уявний).

Вираз, що стоїть справа у формулі (1), називається *алгебраїчною формою запису комплексного числа.*

Два комплексні числа $z = a + b \cdot i$ і $\bar{z} = a - b \cdot i$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються *спряженими.*

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ і $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$ вважаються рівними ($z_1 = z_2$) тоді і тільки тоді, коли рівні їхні дійсні частини і рівні їхні уявні частини: $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$.

Комплексне число $z = a + b \cdot i$ дорівнює нулю ($z = a + b \cdot i = 0$) тоді і тільки тоді, коли $a = b = 0$.

Основні дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ і $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$, заданими в алгебраїчній формі, визначаються такими рівностями:

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$;

2) $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$;

3) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) \cdot i$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i$.

Таким чином, арифметичні дії над комплексними числами виконуються за звичайними правилами дій над двочленами з урахуванням того, що $i^2 = -1$.

Приклад 1. Над комплексними числами $z_1 = 2 - 3i$ та $z_2 = 3 + i$ виконати дії: $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$; z_2^2; $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Розв'язання.

1. $z_1 + z_2 = (2-3i)+(3+i)=(2+3)+i(-3+1)=5-2i;$

2. $z_1 \cdot z_2 = (2-3i)\cdot(3+i)=6-9i+2i-3i^2 = 9-7i;$

3. $z_2^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i;$

4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(2-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{6-9i-2i+3i^2}{9-i^2} = \dfrac{3-11i}{10} = \dfrac{3}{10} - \dfrac{11}{10}i.$

Приклад 2. Обчислити: $\dfrac{(1+5i)\cdot(2-3i)-15+2i}{4+i}$.

Розв'язання.

$$\frac{(1+5i)\cdot(2-3i)-15+2i}{4+i} = \frac{2-3i+10i+15-15+2i}{4+i} = \frac{2+9i}{4+i} =$$

$$= \frac{(2+9i)\cdot(4-i)}{(4+i)\cdot(4-i)} = \frac{8-2i+36i+9}{16+1} = \frac{17+34i}{17} = 1+2i\,.$$

Піднесення числа $z = a + b\cdot i$ до цілого натурального степеня виконується за формулою бінома Ньютона з урахуванням того, що:

$$i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1,\ \ i^5 = i,\ \dots .$$

1.2. Геометричне зображення комплексних чисел

Комплексне число $z = a + b\cdot i$ можна зобразити точкою на площині *XOY*. Абсциса цієї точки у прямокутній декартовій системі координат дорівнює a, ордината дорівнює b. Цим встановлено взаємно-однозначну відповідність: кожному комплексному числу $z = a + b\cdot i$ відповідає лише одна точка $M(a;b)$ площини *XOY* і, навпаки, кожна точка $M(a;b)$ є відповідною тільки для одного комплексного числа $z = a + b\cdot i$.

Вісь абсцис *OX* називають ***дійсною*** віссю , а вісь ординат *OY* називають ***уявною*** віссю. Площину, між точками якої і комплексними числами встановлено взаємно-однозначну відповідність, називають ***комплексною площиною.***

Комплексне число $z = a + b \cdot i$ при $b = 0$ збігається з дійсним числом a: $z = a + 0 \cdot i = a$. Тому дійсні числа є окремим випадком комплексних, вони зображуються точками осі Ox.

Комплексні числа $z = a + b \cdot i$, в яких $a = 0$, називаються *суто уявними*; такі числа зображуються точками осі Oy.

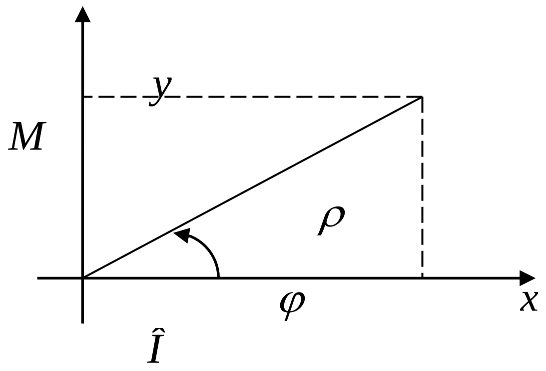
Допускається запис комплексного числа у вигляді: $z = a + i \cdot b$.

1.3. Тригонометрична форма комплексного числа

Полярні координати точки $M(x; y)$ на комплексній площині називаються *модулем* і *аргументом комплексного числа* $z = x + y \cdot i$ і позначаються: $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = Argz$.

Оскільки $x = \rho \cdot \cos\varphi$, $y = \rho \cdot \sin\varphi$ (див. рисунок), то з формули (1) маємо:

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi). \tag{5.2}$$



Вираз, який стоїть справа у формулі (5.2), називається *тригонометричною формою комплексного числа* $z = x + y \cdot i$.

Модуль $|z| = \rho$ комплексного z числа визначається однозначно, а аргумент φ – з точністю до $2\pi k$:

$$Argz = \arg z + 2\pi k, \; k \in Z.$$

Тут під $Argz$ розуміють *загальне значення аргументу*; на відміну від нього, $\arg z$ – *головне значення аргументу*, воно знаходиться на проміжку $(-\pi; \pi]$ і відраховується від додатного напряму осі Ox проти годинникової стрілки.

Якщо $z = 0$, то вважають, що $|z| = 0$, а $\arg z$ – невизначений.

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \quad x > 0; \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, \quad x < 0, y > 0; \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, \quad x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \quad x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \quad x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Розглянемо *дії над комплексними числами в тригонометричній формі*. Нехай

$$z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1), \qquad z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2),$$

тоді:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) \cdot i] =$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot i].$$

Отже, *під час множення комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються*.

Це правило поширюється на довільно скінченне число множників.

Зокрема, якщо всі n множників рівні, то справедлива *формула Муавра*:

$$z^n = (\rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi))^n = \rho^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi). \tag{5.3}$$

При діленні комплексних чисел маємо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right). \tag{5.4}$$

Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника; аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника.

При добуванні кореня n-го степеня з комплексного числа, записаного в тригонометричній формі (5.2) користуються наступною формулою (наслідок з формули Муавра):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \; k = 0, 1, 2, ..., n-1, \tag{5.5}$$

де під коренем $\sqrt[n]{\rho}$ потрібно розуміти його арифметичне значення.

Надаючи k значень $0,1,2,\ldots,n-1$, дістанемо n різних значень кореня. Для інших значень k аргументи відрізнятимуться від знайдених на число, кратне 2π, тому значення кореня збігатимуться зі вже знайденими.

Приклад 3. Знайти всі значення кореня: $\sqrt[4]{-1}$.

Розв'язання.

Оскільки $z=-1$, то $\rho=1$, $\varphi=\pi$ і згідно формули (3) отримаємо:

$$k=0: z_1=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};$$

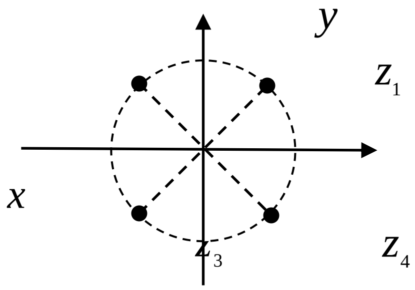
$$k=1: z_2=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k=2: z_3=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{4}\right)=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k=3: z_4=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 3}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 3}{4}\right)=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}=i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Як видно з рисунку, всі чотири корені знаходяться на колі радіуса $\sqrt[4]{\rho}$ з центром у початку координат і є вершинами правильного чотирикутника. Ця властивість справедлива для всіх коренів n-го степеня ($n\in N$) з комплексного числа $z=\rho\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$.



Приклад 4. Знайти множину точок z комплексної площини (z), що задовольняють співвідношенню: $\operatorname{Re}\left(z^2-\bar{z}\right)=0$.

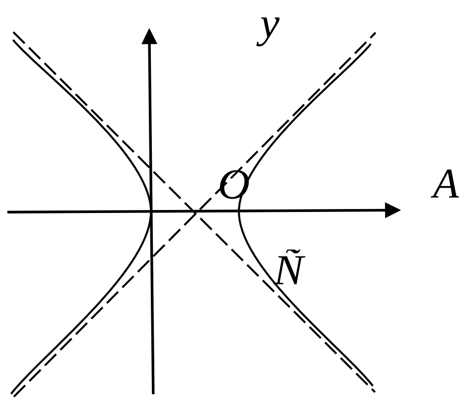
Розв'язання.

Оскільки $z=x+i\cdot y$, $\bar{z}=x-i\cdot y$, $z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$, то:

$$\operatorname{Re}\left(z^2-\bar{z}\right)=\operatorname{Re}\left(x^2-y^2+2xyi-x+yi\right)=x^2-y^2-x=0;$$

тобто: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}$,

звідки: $4\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4y^2=1$ – рівняння рівносторонньої гіперболи з центром в точці $\tilde{N}\left(\frac{1}{2};0\right)$ і вершинами в точках: $O(0;0)$ і $A(1;0)$.



Відповідь: гіпербола $4(x-0{,}5)^2-4y^2=1$.

Приклад 5. Знайти множину точок z комплексної площини (z), що задовольняють умові: $|z-i|+|z+i|\le 4$.

Розв'язання.

Враховуючи, що $z=x+yi$, $z-i=x+(y-1)i$, $z+i=x+(y+1)i$,

а також: $|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, $|z+i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$,

знайдемо рівняння межі: $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4 \Rightarrow$

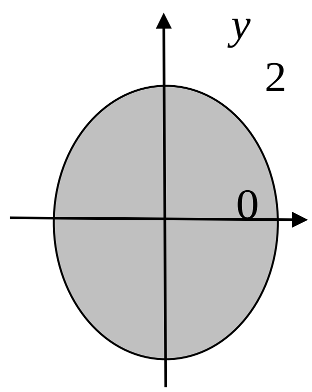
$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=4-\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=16-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}+x^2+(y+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4+y \Rightarrow 4x^2+4y^2+8y+4=16+8y+y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2+3y^2=12$.

Отже, лінія $|z-i|+|z+i|=4$ визначає еліпс: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ з центром у початку координат, великою віссю $b=2$ і малою віссю $a=\sqrt{3}$.



Нерівність $|z-i|+|z+i|\le 4$ визначає внутрішню частину цього еліпса разом з межею.

Відповідь: внутрішня частина еліпса $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ разом з межею.

Приклад 6. Виразити $\sin 5x$ через $\sin x$ і $\cos x$.

Розв'язання.
Розглянемо комплексне число
$$z=\cos x+i\cdot\sin x.$$
Скориставшись формулою бінома Ньютона, отримаємо:
$$z^5=(\cos x+i\cdot\sin x)^5=$$
$$=\cos^5 x+5\cos^4 x\cdot i\sin x-10\cos^3 x\cdot\sin^2 x-10\cos^2 x\cdot i\sin^3 x+$$
$$+5\cos x\cdot\sin^4 x+i\sin^5 x=\left(\cos^5 x-10\cos^3 x\cdot\sin^2 x+5\cos x\cdot\sin^4 x\right)+$$
$$+i\cdot\left(5\cos^4 x\cdot\sin x-10\cos^2 x\cdot\sin^3 x+\sin^5 x\right).$$
(5.6)

А з формули Муавра (5.3) відомо, що:
$$z^5=\cos 5x+i\cdot\sin 5x. \quad (5.7)$$
Порівнявши дійсну і уявну складові правих частин в рівностях (5.6) і (5.7), отримаємо: $\sin 5x=5\cos^4 x\cdot\sin x-10\cos^2 x\cdot\sin^3 x+\sin^5 x$
і одночасно: $\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\cdot\sin^2 x+5\cos x\cdot\sin^4 x$.

1.4. Показникова форма комплексного числа

Із *формули Ейлера*: $\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi=e^{i\cdot\varphi}$ випливає, що комплексне число, записане у тригонометричній формі: $z=\rho\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$, можна також записати у *показниковій формі*:
$$z=\rho\cdot e^{i\cdot\varphi}\ . \quad (5.8)$$

Операції над комплексними числами в показниковій формі:

1. Множення: $z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot e^{i\cdot\varphi_1}\cdot\rho_2\cdot e^{i\cdot\varphi_2}=\rho_1\cdot\rho_2\cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}$.
2. Ділення: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1\cdot e^{i\cdot\varphi_1}}{\rho_2\cdot e^{i\cdot\varphi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}$
3. Піднесення до степеня: $(z)^n=\left(\rho\cdot e^{i\cdot\varphi}\right)^n=\rho^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}$.

4. Добування кореня: $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho\cdot e^{i\cdot\varphi}}=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi}{n}}$, де $\varphi=\arg z+2\pi k$,

тобто: $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\cdot\frac{\arg z+2\pi k}{n}}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1.$

Приклад 7 Обчислити $i^{\,i}$.

Розв'язання.

Представимо основу степеня в показниковій формі:

$$i=1\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)},\ k\in Z\Rightarrow i^{\,i}=\left(e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}\right)^{i}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)},k\in Z.$$

Відповідь: нескінченна множина дійсних чисел: $e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{-\frac{\pi}{2}\pm 2\pi}, e^{-\frac{\pi}{2}\pm 4\pi}, ...$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1.Поняття первісної і невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів.
2.Методи інтегрування: безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінної), інтегрування частинами.
3.Методи інтегрування дробово-раціональних функцій, тригонометричних функцій. Інтегрування квадратичних ірраціональностей. Інтегрування деяких ірраціональних виразів.
4.Визначений інтеграл: означення, умови існування, геометричний зміст, властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи інтегрування визначених інтегралів.
5.Невласні інтеграли першого і другого роду. Означення, обчислення, ознаки збіжності.
6.Обчислення площ плоских фігур. Довжина дуги кривої. Об'єм тіла із заданим поперечним перерізом. Об'єм тіла обертання. Робота змінної сили. Координати центрів мас плоских областей та дуг кривих.
7.Подвійний інтеграл: основні поняття ,означення, властивості. Задача про масу неоднорідної пластини. Обчислення подвійного інтеграла. Повторний інтеграл. Подвійний інтеграл у полярних координатах.
8.Застосування подвійного інтеграла для розв'язання задач обчислення величин: об'єм циліндричного тіла; площа плоскої фігури; площа поверхні; центр маси пластини; моменти інерції пластини.
9.Потрійний інтеграл: основні поняття та означення. Обчислення потрійного інтеграла.
10.Застосування потрійного інтеграла для розв'язання задач обчислення величин: об'єм тіла; моменти інерції тіла відносно координатних осей; статичні моменти.
11.Криволінійний інтеграл першого роду: основні поняття та означення. Зведення криволінійного інтеграла першого роду до визначеного.
12.Застосування криволінійного інтеграла першого роду для розв'язання задач обчислення величин: довжини дуги; площі циліндричної поверхні; маси неоднорідного стержня; координат центра маси кривої; статичних моментів.
13.Криволінійний інтеграл другого роду: основні поняття та означення. Зведення криволінійного інтегралу другого роду до визначеного інтеграла. Криволінійні інтеграли по замкненому контуру.
14.Застосування криволінійного інтеграла другого роду для обчислення площі правильної області.
15.Формула Гріна. Зв'язок між подвійним інтегралом по довільній області D та криволінійним інтегралом по межі L цієї області. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ У ФІЗИЦІ І В ЕКОНОМІЦІ

При введенні поняття визначеного інтеграла застосовувався прийом, згідно якому величина. яку ми шукали, дорівнювала границі *інтегральної суми.* При цьому ця величина була пов'язана з певним проміжком $[a,b]$ та деякою функцією, заданою на цьому проміжку. Існує, також, *метод диференціала*, який полягає у тому, що спочатку складається диференціал шуканої величини. а сама величина знаходиться як інтеграл від знайденого диференціала у відповідних межах. Спираючись на вказані схеми введення визначеного інтеграла, можна розв'язувати широке коло задач прикладного характеру.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ У ФІЗИЦІ

1. Робота змінної сили. Якщо маємо змінну силу $\overrightarrow{F(x)}$, яка виконує роботу на шляху $[a,b]$, то *робота* цієї сили на даному шляху знаходиться за формулою

$$A=\int_a^b F(x)dx \qquad \langle 1\rangle$$

2. Моменти інерції. Відомо, що мірою інерції обертального руху (аналогом маси в разі поступального руху) є момент інерції.

а)Для однорідної кривої $y=f(x)$ з густиною ρ *моменти інерції* відносно координатних осей OX та OY обчислюються відповідно за формулами

$$I_x=\rho\int_a^b y^2\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,dx \quad \text{та} \quad I_y=\rho\int_a^b x^2\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \qquad \langle 2\rangle$$

а момент інерції відносно початку координат дорівнює їх сумі

$$I_0=\rho\int_a^b \left(x^2+y^2\right)\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad \langle 3\rangle$$

б) Для однорідної криволінійної трапеції для моментів інерції маємо

$$I_x=\frac{\rho}{3}\int_a^b y^3dx \quad \text{та} \quad I_y=\rho\int_a^b x^2ydx.$$

3. Статичні моменти. З задачами статики в механіці пов'язані *статичні моменти,* які теж шукаються відносно координатних осей та початку координат і виражаються визначеними інтегралами.

а) Для однорідної кривої $y = f(x)$

$$M_x = \rho \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \qquad M_y = \rho \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \qquad \langle 4 \rangle$$

$$M_0 = \rho \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

б) Для однорідної криволінійної трапеції

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx, \qquad M_y = \rho \int_a^b x \cdot f(x)\, dx. \qquad \langle 5 \rangle$$

Зауваження. Якщо для моментів інерції має місце рівність
$I_0 = I_x + I_y$, то для статичних моментів $M_0 \neq M_x + M_y$.

4. Центр мас (тяжіння). В загальному випадку координати *центра мас* визначаються через статичні моменти:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m} \qquad \langle 6 \rangle$$

Виходячи з цих виразів маємо
а) для однорідної дуги $y = f(x)$

$$x_c = \frac{1}{l} \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \quad \text{та} \quad y_c = \frac{1}{l} \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \qquad \langle 7 \rangle$$

де l позначає довжину дуги;
б) для однорідної криволінійної трапеції

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b x \cdot f(x)\, dx \quad \text{та} \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b y \cdot f(x)\, dx, \qquad \langle 8 \rangle$$

де S – площа криволінійної трапеції.

Теореми Гульдена

Теорема 1. Площа поверхні, яка утворюється від обертання дуги плоскої кривої навколо осі, що лежить в площині цієї кривої і її не перетинає, дорівнює довжині дуги кривої, помноженій на довжину кола, яке описує центр мас дуги.

Теорема 2. Об'єм тіла, утвореного від обертання плоскої фігури навколо осі, що лежить в площині фігури і її не перетинає, дорівнює добутку площі фігури на довжину кола, яке описує її центр мас.

Приклад. Знайти момент інерції частини площини одиничної густини, обмеженої еліпсом $x = acost, y = b\sin t$ відносно осі OY.

Розв'язання. Застосуємо відповідну формулу $\langle 2 \rangle$, врахувавши, що в нашому випадку $\rho = 1$, $dx = -a\sin t$ і еліпс симетричний відносно осей координат

$$I_y = \rho \int_a^b x^2 y dx = \int_{-a}^{a} x^2 y dx = 4 \int_{\pi/2}^{0} a^2 \cos^2 t \cdot b \sin t \cdot (-a \sin t)\, dt .$$

Після перетворень одержимо

$$I_y = -4a^3 b \int_{\pi/2}^{0} \cos^2 t \cdot \sin^2 t\, dt = -a^3 b \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 2t\, dt = a^3 b \int_{0}^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi a^3 b}{4} .$$

Приклад. Користуючись теоремою Гульдена, знайти координати центра мас четвертої частини круга $x^2 + y^2 \le r^2, x \ge 0, y \ge 0$.

Розв'язання. При обертанні частини круга навколо осі OX одержимо півкулю, у якої $V = \frac{2\pi r^3}{3}$. Згідно другої теореми Гульдена $V = \frac{\pi r^2}{4} \cdot 2\pi y_c$.

Звідки $y_c = \frac{2V}{\pi^2 r^2} = \frac{4r}{3\pi}$. Центр мас лежить на прямій $y = x$, тому $x_c = y_c$.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ В ЕКОНОМІЦІ

1. Обсяг продукції. Якщо $f(t)$ – продуктивність праці в момент часу t, то

$$u(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \qquad [1]$$

– обсяг продукції, яка випускається за проміжок часу $[t_1; t_2]$.

2. Капітал за відомими інвестиціями. Нехай за одиницю часу капітал $K(t)$ збільшується на суму чистих інвестицій $f(t)$. Тоді $f(t)=\frac{d}{dt}K(t)$. Тоді приріст капіталу за час від t_1 до t_2 знаходиться як визначений інтеграл

$$\Delta K=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad [2]$$

3. Дисконтований прибуток. Нехай щорічний прибуток описується функцією $f(t)$ та при питомій нормі відсотка $i=\frac{p}{100}$, де p – річний відсоток, відсоток нараховується неперервно. Тоді дисконтована (початкова) сума K за період часу T обчислюється за формулою

$$K=\int_0^T f(t)\cdot e^{-it}\,dt. \qquad [3]$$

При цьому, кінцева сума K_1, отримана за t років розраховується як $K_1=Ke^{it}$.

4. Максимізація прибутку за часом. Нехай $V(t), D(t)$ та $P(t)$ –відповідно загальні витрати, доход та прибуток, які змінюються з часом. Тоді $P(t)=D(t)-V(t)$ і максимум прибутку за час T буде, коли $P'(t)=0$. Тому

$$P(t)=\int_0^T P'(t)\,dt=\int_0^T \big(D'(t)-V'(t)\big)dt. \qquad [4]$$

Приклад. Компанія повинна обрати одну з можливих стратегій розвитку: або вкласти менше в модернізацію обладнання і отримувати менший щорічний прибуток або вкласти більше але і отримувати більший прибуток. Нехай у першому випадку при вкладанні 10 млн. грн. щорічний прибуток складатиме 3 млн. грн., а у другому при вкладанні 15 млн. грн. щорічний прибуток буде 5 млн. грн. Яка стратегія є перспективнішою на 10 років, якщо $i=0{,}1$.

Розв'язання. Згідно формули $[3]$ у першому випадку

$$K_1=\int_0^{10} 3e^{-0{,}1t}dt-10=-30\left(1-e^{-1}\right)-10=8{,}964\,(\textit{млн.грн.}),$$

$$K_2=\int_0^{10} 5e^{-0{,}1t}dt-15=-50\left(1-e^{-1}\right)-15=16{,}607\,(\textit{млн.грн.}).$$

Очевидно, що доцільно обирати другу стратегію при плануванні розвитку на 10 років.

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

І. АЛГЕБРА

1. <u>Дії над степенями</u> $(x,\ y\in\mathbb{R},\ a>0,\ b>0)$**:**

$$a^0=1;\qquad a^x\cdot a^y=a^{x+y};\qquad a^x:a^y=a^{x-y};\qquad \left(a^x\right)^y=a^{xy};$$

$$(ab)^x=a^xb^x;\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x};\qquad a^{-x}=\frac{1}{a^x}.$$

2. <u>Дії з арифметичними коренями</u> $(n,\ k\in\mathbb{N},\ n\ge 2,\ k\ge 2,\ a>0,\ b>0)$**:**

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\quad (b\ne 0);$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k};\qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a};\qquad \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k};\qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a;$$

$$\sqrt[sn]{a^{kn}}=\sqrt[s]{a^k};\qquad \sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a};\qquad \left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n}=|a|.$$

2. <u>Формули скороченого множення</u> $(a,b\in\mathbb{R})$**:**

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);\qquad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2+b^3;\qquad a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right).$$

4. <u>Квадратне рівняння</u>:

а) $x^2+px+q=0$; $\quad x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$; $\quad x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$;

$x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$ – теорема Вієта;

б) $ax^2+bx+c=0 \quad (a\ne 0)$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$;

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$ – теорема Вієта.

5. <u>Логарифми</u>:

За означенням логарифму: $a^{\log_a x} = x$, $(a > 0,\ a \neq 1;\ x > 0)$.

$\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$;

$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$, $(x > 0,\ y > 0)$;

$\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$, $(x > 0,\ y > 0)$;

$n\log_a x = \log_a x^n$; $\dfrac{1}{n}\log_a x = \log_a \sqrt[n]{x}$, $(x > 0)$; $\log_a mx = \dfrac{1}{m}\log_a x$;

$\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x|$; $\log_a \sqrt[n]{x^{2k}} = \dfrac{2k}{n}\log_a |x|$, $(x \neq 0)$;

$\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$, $(x,\ y > 0)$;

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$, $(x,\ y > 0)$;

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, $(x > 0,\ b > 0 : b \neq 1)$; $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

6. <u>Прогресії</u>:

Арифметична прогресія (a_1 – перший член, d – різниця, n – число членів, a_n – n-й член, S_n – сума перший n членів):

$$a_n = a_1 + d(n-1); \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n.$$

Геометрична прогресія (b_1 – перший член, q – знаменник $q \neq 0$, n – число членів, b_n – n-й член $(b_n \neq 0)$, S_n – сума перший n членів):

$$b_n = b_1 q^{n-1}; \qquad S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \dfrac{b_1}{1+q}$ – сума нескінченно спадної геометричної прогресії.

7. Похідні основних елементарних функцій:

1. $c' = 0 \qquad (c - const)$.
2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}$.
3. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$.
4. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$.
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
6. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.
7. $(\sin x)' = \cos x$.
8. $(\cos x)' = -\sin x$.
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

7. Прямокутна декартова система координат на площині:

1. Відстань між точками $A_1(x_1;\, y_1)$ та $A_2(x_2;\, y_2)$:

$$\left|A_1A_2\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}\,.$$

2. Координати точки $C\left(x_C;\, y_C\right)$ середини відрізка A_1A_2, $A_1(x_1;\, y_1)$, $A_2(x_2;\, y_2)$:

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. Умови паралельності прямих $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$:

$$k_1 = k_2.$$

4. Умови перпендикулярності прямих $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

2. Рівняння кола радіуса R з центром у точці $(x_0;\, y_0)$:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2.$$

II. ТРИГОНОМЕТРІЯ

1. Перехід від градусної міри до радіанної:

$$\alpha = \frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}.$$

2. Деякі значення тригонометричних функцій:

α \ $f(\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$0^\circ (0)$	0	1	0	∞
$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞	0
$180^\circ (\pi)$	0	-1	0	$-\infty$
$270^\circ \left(\frac{3\pi}{2}\right)$	-1	0	$-\infty$	0

3. Формули зведення:

f \ φ	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\varphi$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\varphi$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\,\varphi$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\varphi$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$

4. Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$ $\qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};$ $\qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}\right);$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z});$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,\qquad \left(\alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}\right);$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\qquad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in\mathbf{Z}\right);$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\qquad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in\mathbf{Z}\right);$$

5. <u>Формули додавання</u>:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},\qquad \left(\alpha,\ \beta,\ \alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right).$$

6. <u>Формули подвійного і потрійного аргументу</u>:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\qquad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbf{Z};\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right);$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\alpha},\qquad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbf{Z};\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right);$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\qquad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha},\qquad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}\right);$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha},\qquad \left(\alpha\neq\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}\right).$$

7. <u>Формули половинного аргументу</u>:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\qquad (\alpha\neq\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z});$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\qquad (\alpha\neq 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}).$$

8. <u>Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток</u>:

$$\sin\alpha+\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\alpha=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\alpha=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta},\qquad \left(\alpha,\ \beta\neq\frac{2n+1}{2}\pi,\ n\in\mathbf{Z}\right);$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta},\qquad (\alpha,\ \beta\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}).$$

9. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

10. Заміна тригонометричних функцій через тангенс половинного кута:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\qquad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad (\alpha\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbf{Z}).$$

11. Обернені тригонометричні функції:

1. Означення:

$\arcsin x=y$, якщо $\sin y=x$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

$\arccos x=y$, якщо $\cos y=x$, $y\in[0;\pi]$;

$\operatorname{arctg} x=y$, якщо $\operatorname{tg} y=x$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

$\operatorname{arcctg} x=y$, якщо $\operatorname{ctg} y=x$, $y\in[0;\pi]$.

2. $\sin(\arcsin x)=x$, $\cos(\arccos x)=x$, $x\in[-1;1]$;
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

3. $\arcsin(\sin x)=x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

$\arccos(\cos x) = x,\qquad x \in [0;\pi];$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right];$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\qquad x \in [0;\pi].$

12. <u>Найпростіші тригонометричні рівняння</u> $(n \in \mathbb{Z})$ та їх частинні випадки:

1. $\sin x = a \quad (|a| \le 1) \quad \Leftrightarrow \quad x_n = (-1)^n \arcsin a + 2\pi:$

   $\sin x = 0,\qquad x = \pi n;$

   $\sin x = 1,\qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

   $\sin x = -1,\qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$

2. $\cos x = a \quad (|a| \le 1) \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \pm \arccos a + 2\pi:$

   $\cos x = 0,\qquad x = \frac{\pi}{2}\pi n;$

   $\cos x = 1,\qquad x = 2\pi n;$

   $\cos x = -1,\qquad x = \pi + 2\pi n.$

3. $\operatorname{tg} x = a \quad (a \in \mathbf{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \operatorname{arctg} a + \pi n:$

   $\operatorname{tg} x = 0,\qquad x = \pi n;$

   $\operatorname{tg} x = 1,\qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n;$

   $\operatorname{tg} x = -1,\qquad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$

4. $\operatorname{ctg} x = a \quad (a \in \mathbf{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \operatorname{arcctg} a + \pi n.$

5. $\arcsin(-\alpha) = -\arcsin \alpha;\qquad \arccos(-\alpha) = \pi - \arccos \alpha;$

   $\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg} \alpha;\qquad \operatorname{arcctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arcctg} \alpha.$

III. ГЕОМЕТРІЯ

Планіметрія

1. <u>Довільний трикутник</u> (a, b, c – сторони; α, β, γ – протилежні їм кути; p – півпериметр, тобто $p=\dfrac{a+b+c}{2}$; R – радіус описаного кола; S – площа; h_a, m_a, l_a – довжини висоти, медіан і бісектриси, проведених до сторони a; r – радіус вписаного кола):

1) $a+b>c$; $a+c>b$; $b+c>a$; $\alpha+\beta+\gamma=\pi$;

2) $S=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a$; $S=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$; $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

3) $r=\dfrac{S}{p}$; $R=\dfrac{abc}{4S}$;

4) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (теорема косинусів);

5) $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$ (теорема синусів);

6) $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}$.

Три медіани трикутника перетинаються в одній точці, що лежить всередині трикутника. Точка перетину ділить медіани на відрізки, довжини яких відносяться як $2:1$, рахуючи від вершини:

7) $l_a=\dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$.

Три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, що лежить всередині трикутника, і точка перетину бісектрис рівновіддалена від сторін трикутника і є центром вписаного кола.
Бісектриса при перетині зі стороною ділить її на відрізки, пропорційні сторонам трикутника, які прилягають до цих відрізків:

8) $h_a=\dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Три висоти трикутника перетинаються в одній точці.

9) Три перпендикуляри, проведені через середини сторін трикутника, перетинаються в одній точці, яка рівновіддалена від вершин цього трикутника і є центром описаного трикутника.

2. <u>Прямокутний трикутник</u> (a, b – катети; c – гіпотенуза; a_c, b_c – проекції катетів на гіпотенузу):

1) $S=\dfrac{1}{2}ab$; $S=\dfrac{1}{2}ch_c$; 2) $r=\dfrac{a+b-c}{2}$; $R=\dfrac{c}{2}$;

3) $a^2+b^2=c^2$ (теорема Піфагора);

4) $\dfrac{a_c}{h_c}=\dfrac{h_c}{b_c}$; $\dfrac{a_c}{a}=\dfrac{a}{c}$; $\dfrac{b_c}{b}=\dfrac{b}{c}$;

5) $a=c\cdot\sin\alpha=c\cdot\cos\beta=b\cdot\operatorname{tg}\alpha=b\cdot\operatorname{ctg}\beta$.

3. <u>Рівнобедрений трикутник</u> (a – сторона; S – площа):

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\qquad r=\frac{a\sqrt{3}}{6};\quad R=\frac{a\sqrt{3}}{3};\qquad h_a=m_a=l_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

4. <u>Довільний опуклий чотирикутник</u> (d_1, d_2 – діагоналі; φ – кут між ними; S – площа):

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$$

5. <u>Паралелограм</u> (a, b – суміжні сторони; α – кут між ними; S –площа):

$$S=ah_a=ab\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi;$$

$$d_1^2=a^2+b^2+2ab\cdot\cos\alpha;\qquad d_2^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha.$$

6. <u>Ромб</u> (a – сторона; α – кут між суміжними сторонами; d_1, d_2 – діагоналі):

$$S=ah_a=a^2\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2.$$

7. <u>Прямокутник</u> (a, b – суміжні сторони; d_1, d_2 – діагоналі; α – кут між ними):

$$S=ab=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$$

8. <u>Квадрат</u> (a – сторона; d – діагональ): $S=a^2=\dfrac{d^2}{2}$.

9. <u>Паралелограм</u> можна вписати в коло в тому і тільки тому випадку, коли він є прямокутником.

10. В паралелограм можна вписати коло в тому і тільки тому випадку, коли він є ромбом.

11. <u>Трапеція</u> (a, b – сторони; h – відстань між ними; c, d – бічні сторони; l – середня лінія):

$$l=\frac{a+b}{2};\qquad S=\frac{a+b}{2}h=l\cdot h.$$

12. В трапецію можна вписати коло в тому і тільки в тому випадку, коли

$$a + b = c + d .$$

13. Навколо трапеції можна описати коло, якщо вона рівнобедрена.

14. Правильний многокутник (a_n – сторона правильного многокутника; n – число сторін; R – радіус описаного кола; r – радіус вписаного кола):

$$a_3 = R\sqrt{3}; \qquad a_4 = R\sqrt{2}; \qquad a_6 = R; \qquad S = \frac{n \cdot a_n \cdot r}{2}.$$

15. Коло, круг (r – радіус; l – довжина кола; S – площа круга):

$$l = 2\pi r; \qquad S = \pi r^2.$$

16. Сектор (l – довжина дуги, що обмежує сектор; n° – градусна міра центрального кута; α – радіанна міра центрального кута):

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = r\alpha; \qquad S = \frac{\pi r H 2n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha.$$

Стереометрія

1. Довільна призма (t − бокове ребро; p − периметр основи; S − площа основи; H − висота; p_0 − периметр перпендикулярного перетину; $S_б$ − площа бічної поверхні; V − об’єм):

$$S_б = p_0 \cdot l; \qquad V = S \cdot H.$$

2. Пряма призма: $S_б = p \cdot l$.

3. Прямокутний паралелепіпед (a, b, c − його виміри; d − діагональ):

$$S_б = p \cdot H; \qquad V = a \cdot b \cdot c; \qquad d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

4. Куб (a − ребро): $V = a^3$; $d = a\sqrt{3}$.

5. Довільна піраміда (S − площа основи; H − висота; V − об’єм, p − периметр основи; l − апофема): $V = \frac{1}{3} S \cdot H$; $S_б = \frac{1}{2} p \cdot l$.

6. Довільна зрізана піраміда (S_1, S_2 − площа основи; h − висота):

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right).$$

7. Правильна зрізана піраміда (p_1, p_2 − периметри основи; l − апофема):

$$S_б = \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2\right) \cdot l .$$

8. <u>Циліндр</u> (R − радіус основи; H − висота):

$$S_б = 2\pi R \cdot H ; \qquad V = \pi R^2 \cdot H .$$

9. <u>Конус</u> (R − радіус основи; H − висота; l − твірна):

$$S_б = \pi R \cdot l ; \qquad V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H .$$

10. <u>Зрізаний конус</u> (R, r − радіуси основ; l − твірна; S_n − площа повної поверхні):

$$S_б = \pi\left(R + r\right) \cdot l ; \qquad S_n = \pi\left(R^2 + r^2\right) + \pi\left(R + r\right) \cdot l ;$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$

11. <u>Куля, сфера</u> (R − радіус кулі; S − площа сферичної поверхні; V − об’єм кулі):

$$S = 4\pi R^2 ; \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

13. <u>Кульовий сегмент</u> (R − радіус кулі; h − висота сегмента; S − площа сферичної поверхні сегмента; V − об’єм):

$$S = 2\pi R \cdot h ; \qquad V = \pi h^2 \cdot \left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

14. <u>Кульовий сектор</u> (R − радіус кулі; h − висота сегмента; V − об’єм):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot h .$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ, 2002. – 400 с.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.
3. Валеев К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч.1. – 546 с.
4. Валеев К.Г., Джалладова І.А**.** Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2002. – Ч.2. – 451 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для студ. втузов. В 2-х ч.Ч.1 – М.: Высшая школа, 1999.
6. Денисюк В.П.,Репета В.К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч.2. Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276 с.
7. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. - 6-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2018. – 648 с.
8. Вища математика : Зб. задач : Навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко, Р. К. Клименко, В. В. Крочук, М. А. Мартиненко ; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.
9. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. – Київ: Видавничий центр «Академія», 2003. – 624 с.
10. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. Навч. Посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 600 с.
11. Михайленко В.М., Федоренко Н.Д. Математичний аналіз для економістів: Навч. посібник. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2002. – 298 с.
12. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики — Серия «Учебники для вузов. Специальная литература». — СПб.: Издательство «Лань», 1999. — 736 с.

13. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.

14. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник.—Д.: „Видавництво Сталкер", 2003.—495 с.

15. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 432 с.

16. Станішевський С.О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 270 с.

17. Тевяшев А.Д., Литвин Ю.Г. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. 2-е вид. - Х.: Рубікон. 1999. – 320 с.

Навчальне видання

Задерей Петро Васильович
Лагода Оксана Андріївна
Нестеренко Ольга Борисівна
Харитонова Марина Олексіївна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Редактори: О. Б. Нестеренко;
О. А. Лагода

Підп. до друку 30.06.2021 р. Формат 60х84 1/16.
Ум. друк. арк. 12,55. Облік. вид. арк. 9,82. Наклад 12 пр. Зам. 1713.

Видавець і виготовлювач Київський національний університет технологій та дизайну.
вул. Немировича-Данченка, 2, м. Київ-11, 01011.

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 993 від 24.07.2002.