УДК 517.1:519.6

ПРОГРАМНЕ ТА АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРОЦЕСІВ УКРУПНЕННЯ ЕРГОДИЧНИХ МАРКІВСЬКИХ СИСТЕМ

О.Є. Бабенко, магістрант

Київський національний університет технологій та дизайну

В.І. Водоп'янов, магістрант

Київський національний університет технологій та дизайну

С.М. Краснитський, д. ф.-м. н., професор

Київський національний університет технологій та дизайну

Ключові слова: системи марківського типу, укрупнення станів марківської системи, граничні розподіли.

Проблеми аналізу і обробки великих даних на практиці приймають різні форми і можуть стосуватися як одержання потрібної інформації з масивів даних великих обсягів, так і можливостей зменшення степені деталізації моделей, котрі розроблені для інтерпретації та вироблення належних висновків з поведінки наявних даних. Комп'ютерна програма, про яку йде мова у даній роботі, виконує розрахунки, що з'ясовують питання про можливість укрупнення (отже, про скорочення кількості) станів системи, котра адекватним чином описується як ергодичний марківський ланцюг із скінченною множиною станів.

Розглянемо систему ξ типу «марківський ланцюг» [1-3] (скорочення — МЛ) з фазовим простором (множиною станів) $X = \{1, \dots, r\}$, перехідною матрицею $P = (p_{ij})_{r\times r}$ і початковим розподілом π. Під властивістю ергодичності ми маємо на увазі сполученість всіх станів системи. Нехай виділено $X_1, \dots, X_m$ — m неперетинних підмножин X ($m < r$) так, що

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_m, X_i \cap X_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Утворимо новий процес (систему) η наступним чином. Будемо вважати множини $X_1, \dots, X_m$ станами нової системи (процесу) η, вважаючи, що результатом j -го кроку для нового процесу є стан (множина) X_k, якщо ланцюг ξ на j -му кроці попадає саме в цей стан:

$$\{\eta = X_j\} = \{\xi \in X_j\}. \quad (1)$$

Імовірності станів для нового процесу визначимо наступним чином:

$$P_\pi\big(\eta(0) = X_{i_0}, \eta(1) = X_{i_1}, \dots, \eta(n) = X_{i_n}\big) =$$
$$= P_\pi\big(\xi(0) \in X_{i_0}, \xi(1) \in X_{i_1}, \dots, \xi(n) \in X_{i_n}\big). \quad (2)$$

Кажуть, що стани марківського ланцюга ξ можна укрупнити за допомогою розбиття $\{X_1, \dots, X_m\}$, якщо для довільного початкового розподілу π укрупнений процес η, що визначений рівностями (1), (2), є марківським ланцюгом, перехідні ймовірності якого не залежать від розподілу π.

Позначимо $p_{iA_j} = \sum_{k \in A_j} p_{ik}$. Для початкового ланцюга ξ величина p_{iA_j} є імовірністю попасти із стану x_i в множину станів A_j за один крок.

Відзначимо, що згідно з [3], для того, щоб марківську систему (ланцюг) можна було укрупнити за допомогою розбиття $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, необхідно і достатньо, щоб для довільних множин X_i, X_j імовірності p_{kA_j} мали одне й те ж саме значення при всіх $k \in X_i$. Ці спільні значення $\hat{p}_{ij}$ і утворюють перехідну матрицю $\hat{P}$ укрупненої системи.

До алгоритму побудови матриці $\hat{P}$. Нехай початкова система мала *r* станів, у укрупнена — *m* станів. Введемо матрицю *U* порядку $m \times r$, *i* -й рядок якої є імовірнісним вектором, що має рівні компоненти для станів з X_i та нулі на інших місцях, а також матрицю *V* порядку $r \times m$, *j* -й стовпець якої є вектором, ті компоненти якого, що відповідають станам з X_j, дорівнюють 1, а інші компоненти — нулі. Тоді перехідна матриця $\hat{P}$ укрупненої системи дається рівністю [3]

$$\hat{P} = UPV. \tag{3}$$

Зауважимо, що умовою можливості укрупнення системи служить рівність [3]

$$VUPV = PV, \tag{4}$$

в якій U, P, V — ті ж самі матриці, що й у рівності (3).

Комп’ютерна програма, про яку йде мова у доповіді, функціонує у середовищі DELPHI і виконує наступні дії. Виходячи з списку укрупнених станів, що вводить користувач, програма перевіряє можливість пропонованого укрупнення, виходячи з рівності (4). При позитивній відповіді знаходиться перехідна матриця укрупненої системи згідно з рівністю (3). Наступними кроками її роботи є розв’язання системи рівнянь (6), (7) з метою знаходження інваріантних розподілів імовірностей станів системи, як в початковому вигляді, так і після укрупнення. Зазначені дії можна розглядати як певну форму роботи з великими даними спеціальної структури.

Список використаних джерел

1. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010. — 559 с.

2. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970. — 271 с.

3. Краснитський С.М., Резанова В.Г., Чумак О.О., Чайковська О.С. Марківські процеси з дискретною множиною станів і деякі їх застосування (методичні вказівки). — К.: КНУТД, 2019 — 59 с.