

УДК 531/534:624

СУРЬЯНИНОВ Н.Г.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры  
ШВАГИРЕВ П.А., ШОТАДЗЕ Г.Б.

Одесский национальный политехнический университет

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРУБОПРОВОДА В ВИДЕ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Цель.** Построение математической модели трубопровода с использованием численно-аналитического метода граничных элементов.

**Методика.** Фрагмент надземного трубопровода, расположенный на системе промежуточных опор, рассматривается, как неразрезная балка, для расчета которой предлагается использовать метод граничных элементов.

**Результаты.** Получены эпюры распределения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях трубопровода.

**Научная новизна.** Впервые для расчета трубопроводов применен численно-аналитический метод граничных элементов, который показал свою высокую точность и эффективность при анализе стержневых систем любой конфигурации.

**Практическая значимость.** Численная реализация предложенных здесь алгоритмов выполнена в свободно распространяемом математическом пакете Scilab. При этом программа носит универсальный характер, поскольку не накладывалось никаких ограничений на нагрузки, геометрические размеры трубопровода и материал.

**Ключевые слова:** трубопровод, неразрезная балка, метод граничных элементов, фундаментальные функции, граничные параметры, прогиб, Scilab.

**Введение.** В зависимости от условий нагружения, опирания и целей расчета элементы трубопровода приводятся к разным расчетным схемам. Практически охвачены все расчетные схемы (исключая фермы и пластины), рассматриваемые в строительной механике. В частности, это может быть балка, балка на упругом основании или в упругопластической среде, брус малой кривизны, рамная или арочная конструкция, плоско-пространственная система или стержень ломаного очертания. Более точными, хотя и гораздо более сложными, являются оболочечные модели — цилиндрическая оболочка с прямой или криволинейной осью в упругой или упругопластической среде. Предлагаются и другие модели [1, 2], которые, по мнению их авторов, приводят к более точным результатам расчета или упрощают расчет без снижения его точности. Достаточно часто трубопровод можно моделировать, как неразрезную балку.

**Постановка задачи.** Для реализации большинства перечисленных расчетных схем весьма эффективным представляется применение численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ), который особенно хорошо зарекомендовал себя при расчете плоских и пространственных стержневых систем разного очертания [3, 4].

Если несколько стержней, подверженных изгибу, соединены в единую конструкцию, то для системы стержней можно составить матричное уравнение типа

$$\begin{pmatrix} EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{24}(x-\xi) \\ -A_{34}(x-\xi) \\ -A_{44}(x-\xi) \end{pmatrix} q(\xi) d\xi, \quad (1)$$

или

$$\vec{Y}(x) = \vec{A}(x)\vec{X}(0) + \vec{B}(x), \quad (2)$$

где  $\vec{Y}(x)$  – вектор параметров напряженно-деформированного состояния стержня в текущей точке;  $\vec{A}(x)$  – квадратная матрица фундаментальных ортонормированных функций уравнения (1);  $\vec{X}(0)$  – вектор начальных параметров;  $\vec{B}(x)$  – вектор внешней нагрузки.

Матрица  $\vec{A}(x)$  преобразуется к квазидиагональному виду, а векторы  $\vec{Y}(x)$ ,  $\vec{X}(0)$  и  $\vec{B}(x)$  содержат параметры состояния всех стержней:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{n-1} & \\ & & & & A_n \end{pmatrix}; \vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Y_n \end{pmatrix}; \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix}; \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-1} \\ B_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Если координате  $x$  каждого стержня дать граничное значение  $l_i$ , то для системы матриц (3) можно выполнить достаточное простое преобразование по схеме

$$\vec{Y}(l) = \vec{A}(l)\vec{X}(0) + \vec{B}(l) \rightarrow \vec{A}(l)\vec{X}(0) - \vec{Y}(l) = -\vec{B}(l) \rightarrow \vec{A}_*(l)\vec{X}_*(0, l) = -\vec{B}(l), \quad (4)$$

где конечные граничные параметры матрицы  $\vec{Y}$  переносятся на место нулевых параметров вектора  $\vec{X}$ . При этом, эти векторы дополняются уравнениями равновесия и совместности перемещений узловых точек и граничными условиями. В конце схемы преобразований (4) получается система линейных алгебраических уравнений относительно начальных и конечных параметров всех стержней конструкции. После вычисления начальных параметров стержней их напряженно-деформированное состояние определяется по матричному уравнению (1). Таким образом, решение прямых задач строительной механики стержневых систем в ЧА МГЭ сводится к решению одной системы линейных алгебраических уравнений и вычислению напряженно-деформированного состояния во внутренних точках стержней по соотношениям метода начальных параметров. Такая схема решения обеспечивает получение весьма точных и достоверных результатов, которые можно представить средствами Scilab [5], DELPHI, MATLAB (или другой среды) в виде эпюр, форм свободных колебаний, потери устойчивости и т. п.

**Результаты исследования.** Рассмотрим некоторый фрагмент трубопровода, представленный на рис. 1.



Рис. 1 Фрагмент трубопровода

Представим расчетную схему этого трубопровода в виде неразрезной балки, нагруженной некоторой произвольной нагрузкой (рис. 2), характер действия которой, вообще говоря, никак не влияет на алгоритм предлагаемого ниже подхода.

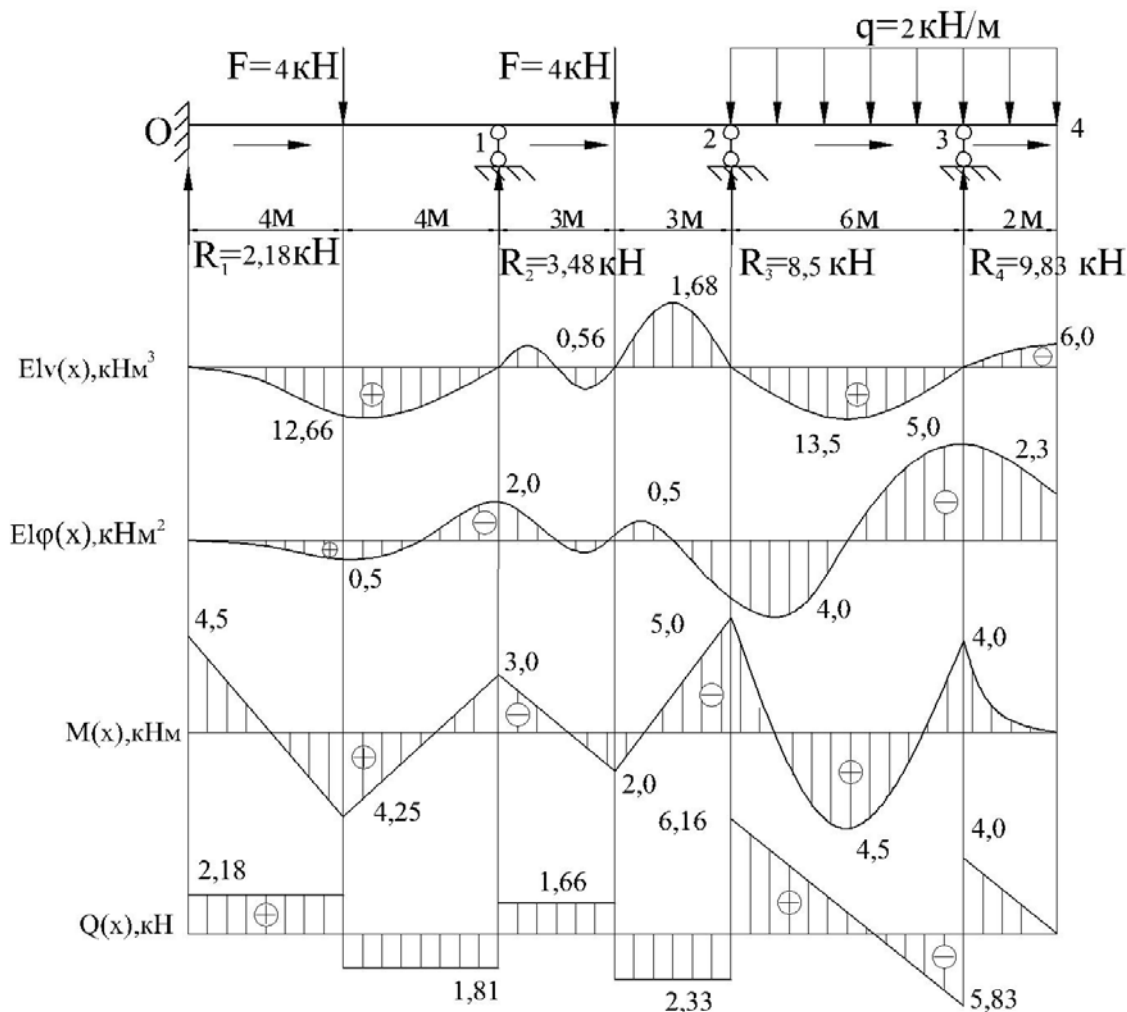


Рис. 2 Моделирование трубопровода неразрезной балкой

Следуя алгоритму ЧА МГЭ [3, 4], разобьем неразрезную балку на 4 одномерных модуля (рис. 2). Каждый из этих модулей работает в условиях изгиба, поэтому дифференциальное уравнение и начальные параметры модуля имеют вид

$$v^{IV}(x) = \frac{q_y(x)}{EI}; \quad EIv(0); \quad EI\varphi(0); \quad M(0); \quad Q(0). \quad (5)$$

Решение задачи Коши (5) в матричной форме запишется следующим образом

$$\begin{pmatrix} EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ & 1 & -x & -A_{13} \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} (x-\xi)^3 q_y(\xi) / 6 \\ (x-\xi)^2 q_y(\xi) / 2 \\ -(x-\xi) q_y(\xi) \\ -q_y(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \quad (6)$$

где

$$A_{13} = x^2 / 2; \quad A_{14} = x^3 / 6 \quad [3].$$

Матрица фундаментальных ортонормированных функций, записанная для всей системы, имеет вид

$$\bar{A} = \begin{array}{|ccc|c|ccc|c|ccc|c|ccc|}
$l_1$	$\frac{-l_1^2}{2}$	$-\frac{l_1^3}{6}$													
1	$-l_1$	$\frac{-l_1^2}{2}$	-1												
	1	$l_1$		-1											
-1		1													
			$l_2$	$\frac{-l_2^2}{2}$	$-\frac{l_2^3}{6}$										
			1	$-l_2$	$\frac{-l_2^2}{2}$	-1									
				1	$l_2$		-1								
-1					1										
						$l_3$	$\frac{-l_3^2}{2}$	$-\frac{l_3^3}{6}$							
						1	$-l_3$	$\frac{-l_3^2}{2}$	-1						
							1	$l_3$		-1					
			-1					1							
						-1				$l_4$	$\frac{-l_4^2}{2}$	$-\frac{l_4^3}{6}$			
									-1	1	$-l_4$	$\frac{-l_4^2}{2}$			
											1	$l_4$			
													1		

Сформируем векторы начальных параметров  $\vec{X}_*$ , конечных параметров  $\vec{Y}$  и внешней нагрузки  $\vec{B}$ . При этом в матрицах  $\vec{X}_*$  и  $\vec{Y}$  учитываем краевые условия каждого модуля, уравнения равновесия и условия совместности перемещений узлов 1, 2, 3, а элементы вектора нагрузки определяем по формулам

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= F(x - a_1)_+^3 / 6 + M(x - a_2)_+^2 / 2 + q[(x - a_3)_+^4 - (x - a_4)_+^4] / 24; \\
 B_{21} &= F(x - a_1)_+^2 / 2 + M(x - a_2)_+ + q[(x - a_3)_+^3 - (x - a_4)_+^3] / 6; \\
 B_{31} &= F(x - a_1)_+ + M \cdot H(x - a_2) + q[(x - a_3)_+^2 - (x - a_4)_+^2] / 2; \\
 B_{41} &= F \cdot H(x - a_1) + q[(x - a_3)_+ - (x - a_4)_+].
 \end{aligned} \quad (7)$$

В соответствии с краевыми условиями в матрице  $\bar{X}_*$  нулевыми оказываются 1, 2, 5, 9, 13 строки. Соответственно обнуляем 1, 2, 5, 9 и 13 столбцы матрицы  $\bar{A}$ . Нулевые строки в  $\bar{X}_*$  заменяем соответствующими независимыми параметрами из матрицы  $\bar{Y}$ .

$\bar{X}_* =$	1	$EI v_{(0)}^{0-1} = 0; Q_{(\ell)}^{0-1}$	$\bar{Y} =$	1	$EI v_{(\ell)}^{0-1} = 0$	$\bar{B} =$	1	256/6
	2	$EI \varphi_{(0)}^{0-1} = 0; Q_{(\ell)}^{1-2}$		2	$EI \varphi_{(\ell)}^{0-1} = EI \varphi_{(0)}^{1-2}$		2	32,0
	3	$M_{(0)}^{0-1}$		3	$M_{(\ell)}^{0-1} = M_{(0)}^{1-2}$		3	-16,0
	4	$Q_{(0)}^{0-1}$		4	$Q_{(\ell)}^{0-1}$		4	-4,0
	5	$EI v_{(0)}^{1-2} = 0; Q_{(\ell)}^{2-3}$		5	$EI v_{(\ell)}^{1-2} = 0$		5	18,0
	6	$EI \varphi_{(0)}^{1-2}$		6	$EI \varphi_{(\ell)}^{1-2} = EI \varphi_{(0)}^{2-3}$		6	18,0
	7	$M_{(0)}^{1-2}$		7	$M_{(\ell)}^{1-2} = M_{(0)}^{2-3}$		7	-12,0
	8	$Q_{(0)}^{1-2}$		8	$Q_{(\ell)}^{1-2}$		8	-4,0
	9	$EI v_{(0)}^{2-3} = 0; EI v_{(\ell)}^{3-4}$		9	$EI v_{(\ell)}^{2-3} = 0$		9	108,0
	10	$EI \varphi_{(0)}^{2-3}$		10	$EI \varphi_{(\ell)}^{2-3} = EI \varphi_{(0)}^{3-4}$		10	72,0
	11	$M_{(0)}^{2-3}$		11	$M_{(\ell)}^{2-3} = M_{(0)}^{3-4}$		11	-36,0
	12	$Q_{(0)}^{2-3}$		12	$Q_{(\ell)}^{2-3}$		12	-12,0
	13	$EI v_{(0)}^{3-4} = 0; EI \varphi_{(\ell)}^{3-4}$		13	$EI v_{(\ell)}^{3-4}$		13	4/3
	14	$EI \varphi_{(0)}^{3-4}$		14	$EI \varphi_{(\ell)}^{3-4}$		14	8/3
	15	$M_{(0)}^{3-4}$		15	$M_{(\ell)}^{3-4} = 0$		15	-4,0
	16	$Q_{(0)}^{3-4}$		16	$Q_{(\ell)}^{3-4} = 0$		16	-4,0

Переставив строки матриц  $\bar{A}_*$  и  $\bar{B}$  в новом порядке, методом Гаусса определяем граничные параметры неразрезной балки.

$$\begin{aligned}
 Q_{(\ell)}^{0-1} &= -1,8125 \text{ кН}; & Q_{(\ell)}^{1-2} &= -2,3333 \text{ кН}; & M_{(0)}^{0-1} &= -4,5000 \text{ кНм}; \\
 Q_{(0)}^{0-1} &= 2,1875 \text{ кН}; & Q_{(\ell)}^{2-3} &= -5,8333 \text{ кН}; & EI \varphi_{(0)}^{1-2} &= -2,0000 \text{ кНм}^2; \\
 M_{(0)}^{1-2} &= -3,0000 \text{ кНм}; & Q_{(0)}^{1-2} &= 1,6667 \text{ кН}; & EI v_{(\ell)}^{3-4} &= -6,0000 \text{ кНм}^3; \\
 EI \varphi_{(0)}^{2-3} &= 4,0000 \text{ кНм}^2; & M_{(0)}^{2-3} &= -5,0000 \text{ кНм}; & Q_{(0)}^{2-3} &= 6,1667 \text{ кН}; \\
 EI \varphi_{(\ell)}^{3-4} &= -2,3333 \text{ кНм}^2; & EI \varphi_{(0)}^{3-4} &= -5,0000 \text{ кНм}^2; & M_{(0)}^{3-4} &= -4,0000 \text{ кНм}; \\
 Q_{(0)}^{3-4} &= 4,0000 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

В расчетах этих величин не учитывалась деформация сдвига, поэтому полученные значения весьма близки к действительным значениям параметров балки.

Определяя состояние конструкции во внутренних точках по уравнению (6), можно построить эпюры, представленные на рис. 2.

**Выводы.** Таким образом, прямолинейные участки надземного трубопровода, расположенного на системе промежуточных опор, можно рассматривать, как неразрезные балки, для анализа напряженно-деформированного состояния которых эффективно использовать численно-аналитический метод граничных элементов.

### Список использованной литературы

1. *Айнбиндер А. Б.* Расчет магистральных и промышленных трубопроводов на прочность и устойчивость / А.Б. Айнбиндер. — М.: Изд-во Недр, 1991. — 288 с.
2. *Рудаченко А.В.* Исследования напряженно-деформированного состояния трубопроводов: учебное пособие / А.В. Рудаченко, А.Л. Саруев; Томский политехнический университет. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. — 136 с.
3. *Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г.* Практикум по решению краевых задач механики: Учебное пособие для студентов технических специальностей. — Одесса: Астропринт, 2011. — 408 с.
4. *Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г.* / Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ. — Труды Санкт-Петербургского политехнич. ун-та / Инженерно-строительный журнал. — № 4 (22). — СПб, 2011. — С. 33-39.
5. *Алексеев Е. Р.* Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Е. А. Рудченко. — М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 269с.

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРУБОПРОВОДУ У ВИГЛЯДІ НЕРОЗРІЗНОЇ БАЛКИ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ СУР'ЯНИНОВ Н.Г.

*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

*ШВАГІРЕВ П.А., ШОТАДЗЕ Г.Б.*

*Одеський національний політехнічний університет*

**Мета.** Побудова математичної моделі трубопроводу з використанням чисельно-аналітичного методу граничних елементів.

**Методика.** Частковий надземного трубопроводу, розташований на системі проміжних опор, розглядається, як нерозрізна балка, для розрахунку якої пропонується використовувати метод граничних елементів.

**Результати.** Отримано епюри розподілу прогинів, кутів повороту, згинальних моментів і поперечних сил в перетинах трубопроводу.

**Наукова новизна.** Вперше для розрахунку трубопроводів застосований чисельно-аналітичний метод граничних елементів, який показав свою високу точність і ефективність при аналізі стрижневих систем будь-якої конфігурації.

**Практична значимість.** Чисельна реалізація запропонованих тут алгоритмів виконана у вільно розповсюджену математичному пакеті Scilab. При цьому програма носить універсальний характер, оскільки не накладалося жодних обмежень на навантаження, геометричні розміри трубопроводу і матеріал.

**Ключові слова:** *трубопровід, нерозрізна балка, метод граничних елементів, фундаментальні функції, граничні параметри, прогин, Scilab.*

## **MATHEMATICAL MODEL OF CONDUIT AS A CONTINUOUS BEAM USING BOUNDARY ELEMENT METHOD**

SURIANINOV N.G.

Odessa State Academy of Construction and Architecture

SHVAGIREV P.A., SHOTADZE G.B.

Odessa National Polytechnic University

**Goal.** Constructing a mathematical model of the pipeline with the use of numerical-analytical boundary element method.

**Methods.** Detail aboveground pipeline system located on the intermediate supports, considered as continuous beam, for the calculation of which is proposed to use the boundary element method.

**Results.** Obtained diagrams of the distribution of deflections, angles of rotation, bending moments and shear forces in sections of the pipeline.

**Scientific novelty.** For the first time for the calculation of pipelines used numerical-analytical boundary element method, which showed its high accuracy and efficiency in the analysis of core systems of any configuration.

**Practical significance.** Numerical realization of the offered algorithms are implemented in a freely distributed mathematical package Scilab. The program is universal, because it does not impose any restrictions on load, geometric dimensions and material of the pipe.

**Keywords:** *pipeline, continuous beam, the boundary element method, the fundamental functions, boundary parameters, deflection, Scilab.*