Блохін О.Л., к.ф.-м.н., Бобовський В.Ю., бакалавр
Київський національний університет технологій та дизайну

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ СКІНЧЕНИХ РІЗНИЦЬ ДИСКРЕТНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Анотація. *Робота присвячена дослідженню спектральних характеристик оператора взяття скінчених різниць дискретного стохастичного процесу та їх зв'язків з кореляційними властивостями вихідного та отриманого процесів. Знайдені формули для автокореляційних та спектральних функцій оператора скінчених різниць n-ого порядку.*

Ключові слова: *дискретний випадковий процес; часовий ряд; спектральний аналіз; спектр; різницеві рівняння; корелограма; характеристична функція.*

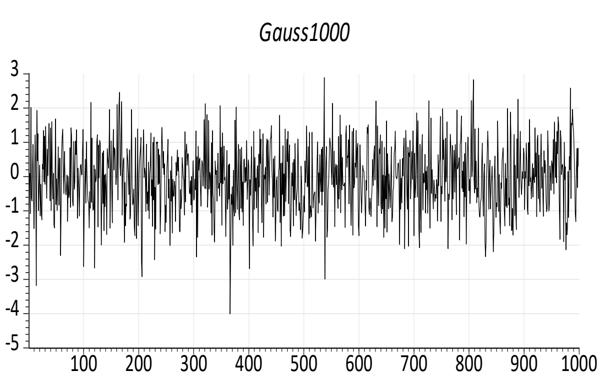
Blokhin O., Bobovsky V.
Kyiv National University of Technologies and Design

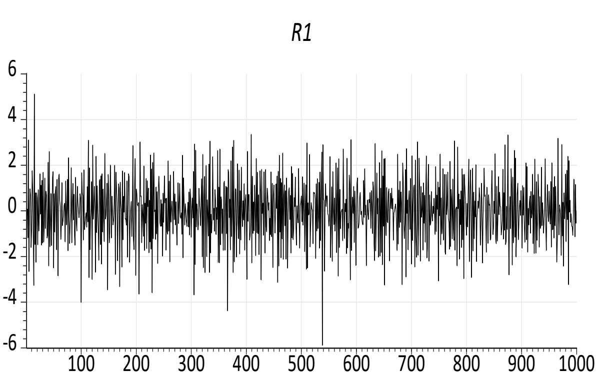
SPECTRAL PROPERTIES OF FINITE DIFFERENCES OF DISCRETE STOCHASTIC PROCESSES

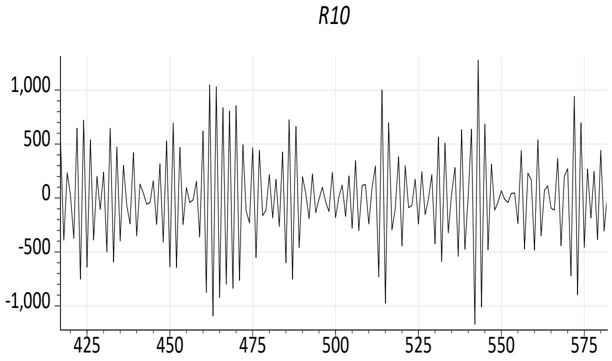
Abstract. *The work is devoted to the study of the spectral characteristics of the operator of taking finite differences of a discrete stochastic process and their connections with the correlation properties of the output and input processes. Formulas for autocorrelation and spectral functions of the operator of finite differences of the n-th order are found.*

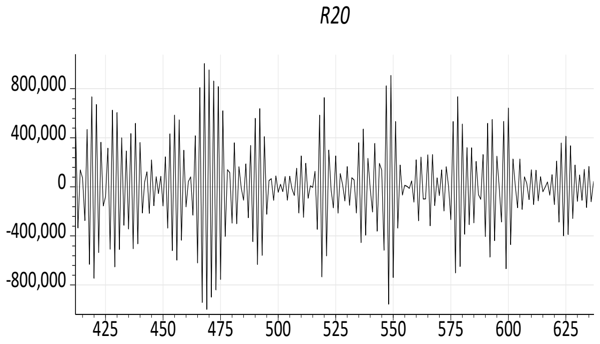
Keywords: *discrete stochastic process; time series; spectral analysis; spectrum; difference equations; correlogram; characteristic function.*

1. Вступ. В прикладної теорії стохастичних процесів одної з головних задач є задача дослідження процесу на стаціонарність – а якщо з'ясується, що процес нестаціонарний, то постає проблема видалення з нього трендової, сезонної, періодичної компонент. Стандартний метод видалення аддитивной поліноміальної компоненти – це обчислення скінчених різниць нестаціонарного процесу. Яка степінь поліноміального тренду, стільки разів треба обчислювати різницю. Тому важливим питанням є задача дослідження властивостей оператора послідовного знаходження різниць вихідного процесу. Основними характеристиками таких операторів є спектр потужності та передавальна функція. Метою нашого дослідження є встановлення зв'язку між цими характеристиками та кореляційними властивостями вхідного та вихідного процесів. Для ілюстрації наведемо результати графічного моделювання стохастичного процесу гаусового білого шуму та його першої, десятої та двадцятої різниць:









2. Z-перетворення скінчених різниць.

Нехай $\{ f(nt), n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ – дискретний часовий ряд. Можна вважати, що $t = 1$ і маємо числову послідовність $\{ f(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$. Розглянемо лінійну систему як визначено в [2] : $g(n) = \Im(f(n))$, яка відображає послідовність $f(n)$ в $g(n)$. Ми будемо вивчати лінійну систему виду $g(n) = \Delta^k f(n)$, де Δ – оператор взяття різниці $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$, Δ^k – результат послідовного k разів виконання оператора Δ. За допомогою лагового оператора $L(f(n)) = f(n-1)$ можна записати $\Delta = 1 - L$, $\Delta(f(n)) = (1-L)(f(n)) = f(n) - f(n-1)$, та $\Delta^n = (1-L)^n$.

В даному контексті використовується така термінологія: $f(n)$ – вхідний сигнал, $g(n)$ – вихідний сигнал, $\Im$-лінійна система (лінійний оператор). Якщо на вхід системи подати δ-функцію:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, \textit{якщо } n = 0 \\ 0, \textit{якщо } n \neq 0 \end{cases}$$

то на виході отримаємо $h(n) = \Im(\delta(n))$. За допомогою цій функції визначається Z-перетворення системи:

$$H(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n} .$$

Тобто, $\Im(z^n) = H(z) z^n$. Така функція $H(z)$ називається характеристичною функцією системи $\Im$ (див. [2, 4, 5]). Для оператора $\Delta = 1 - L$ знайдемо її характеристичну функцію:

$$\Delta(\delta(n)) = \delta(n) - \delta(n-1) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } n = 0 \\ -1, \text{ якщо } n = 1 \\ 0, \text{ якщо } n \neq 0,1 \end{cases}$$

та $H(z) = 1 - z^{-1} = \dfrac{z-1}{z}$ – характеристична функція для оператора Δ. Позначимо $H_n(z)$ – характеристична функція оператора Δ^n, $H = H_1$. Тоді, використовуючи мультіплікативність характеристичних функцій при послідовному виконанні операторів, маємо:

$$H_n(z) = (1 - z^{-1})^n \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Якщо на вхід лінійної системи $\Im = \Delta$ подати сигнал $f(n) = exp(i\omega n)$, отримаємо $H(\exp(i\omega n)) = \dfrac{\exp(i\omega)-1}{\exp(i\omega)}$. Знайдемо модуль та аргумент цієї комплекснозначної функції:

$$H(e^{i\omega}) = 1 - e^{-i\omega} = 1-\cos(\omega) + i\sin(\omega) = 2\sin^2\frac{\omega}{2} + 2i\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} = 2\sin\frac{\omega}{2}(\sin\frac{\omega}{2} + i\cos\frac{\omega}{2}) =$$
$$= 2\sin\frac{\omega}{2}i(\cos\frac{\omega}{2} - i\sin\frac{\omega}{2}) = 2i\sin\frac{\omega}{2}e^{-i\omega/2} = 2\sin\frac{\omega}{2}\exp(i(\frac{\pi-\omega}{2})).$$

$\left|H(e^{i\omega})\right| = \left|2\sin\dfrac{\omega}{2}\right|$ і, в залежності від знаку $\sin(\dfrac{\omega}{2})$:

$$Arg(H(e^{i\omega}) = \frac{\pi-\omega}{2} \text{ або } \frac{3\pi-\omega}{2}$$

Тоді $\left|H_n(e^{i\omega})\right| = 2^n\left|\sin\dfrac{\omega}{2}\right|^n$. Якщо ввести нову змінну $\alpha = \pi - \omega$, то буде:

$$H(\alpha) = 2\cos(\frac{\alpha}{2})\exp(i\alpha/2)$$

$$H_n(\alpha) = 2^n\cos^n(\frac{\alpha}{2})\exp(i\alpha n/2)$$

Якщо ввести нову змінну $\varphi = \dfrac{\alpha n}{2}$, то буде $H_n(\varphi) = 2^n\cos^n(\dfrac{\varphi}{n})\exp(i\varphi)$ – в такому вигляді зручно аналізувати поведінку графіка характеристичної функції як лінії на комплексній площині. В п.3 ми з’ясуємо зв'язок цієї функції з спектральною функцією операторів Δ^n, а в п.5 ми наведемо деякі цікаві властивості цій функції.

3. Корелограма та спектр стохастичних процесів.

Нехай $\{X(n)\}$ – дискретний, стохастично інваріантний процес (див. [1, 6, 7]) з математичним сподіванням $E(X(n)) = 0$ та j-ой автоковаріацією

$$E(X(n)X(n-j)) = \gamma_j$$

Припускаючи, що ряд з автоковаріацій є абсолютно збіжний ($\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|\gamma_j\right|$), визначимо генеруючу функцію:

$$g_X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\gamma_j z^j$$

Тоді спектр стохастичного процесу $\{X(n)\}$ визначається як така функція:

$$g_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}g_X(e^{-i\omega}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\gamma_j e^{-i\omega j}$$

Для процесу типу $MA(\infty)$ (moving average): $X(n) = \mu + \Psi(L)\varepsilon(n)$, де $\Psi(L) = \sum_0^{+\infty}\phi_j L^j$ (L-лаговий оператор), $\sum_0^{+\infty}\left|\phi_j\right| < \infty$, та $\varepsilon(n)$ – некорельовані випадкові величини з однаковою дисперсією σ^2 та нульовим середнім, спектральна функція обчислюється таким чином:

$$g_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} g_X(e^{-i\omega}) = \frac{1}{2\pi}\sigma^2 \Psi(e^{i\omega})\Psi(e^{-i\omega})$$

(див. [3, 8]). Можна вважати, що $\sigma = 1$.

Процес $\Delta^n(\varepsilon) = (1-L)^n(\varepsilon(k)) = \sum_{j=0}^{j=n}(-1)^j \binom{n}{j} L^j \varepsilon(k) = \sum_{j=0}^{j=n}(-1)^j \binom{n}{j}\varepsilon(k-j)$, буде процесом типу $MA(n)$ і тому його спектральна функція має вигляд

$$g_{\Delta^n}(\omega) = g_n(\omega) = \frac{1}{2\pi}(1-e^{i\omega})^n(1-e^{-i\omega})^n,$$

та його характеристична функція буде така: $g_n(z) = (1-z)^n(1-z^{-1})^n$. Якщо розкласти $g_n(z)$ по степеням z, то отримаємо коефіцієнти автоковаріації процесу $\Delta^n(\varepsilon)$.

$$g_n(z) = \sum_{j=-n}^{j=n}\gamma_j zj = z^{-n}(1-z)^n(z-1)^n = (-1)^n z^{-n}(1-z)^{2n} =$$

$$= (-1)^n z^{-n}\sum_{m=0}^{m=2n}(-1)^m \binom{2n}{m} z^m = \sum_{j=-n}^{j=n}(-1)^j \binom{2n}{n+j} z^j$$

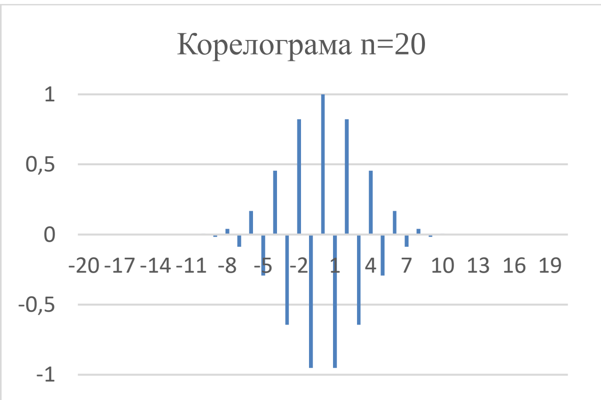
Звідси отримуємо формули для коефіцієнтів автоковаріації:

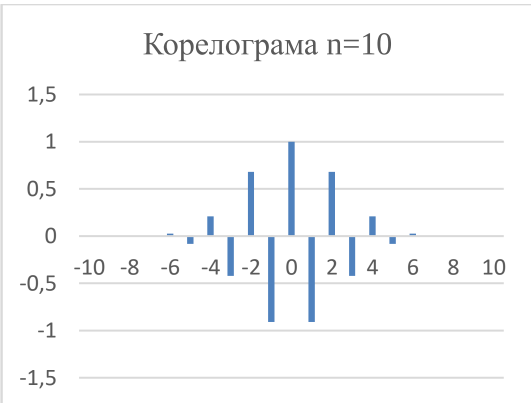
$$\gamma_j = (-1)^j \binom{2n}{n+j} = (-1)^j \frac{(2n)!}{(n-j)!(n+j)!}$$

Коли $j=0$, отримуємо дисперсію: $\gamma_0 = \binom{2n}{n+j} = \frac{(2n)!}{(n-j)!(n+j)!}$. Після ділення коефіцієнтів автоковаріації на дисперсію, отримуємо коефіцієнти автокореляції:

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = (-1)^j \frac{n!n!}{(n+j)!(n-j)!}$$

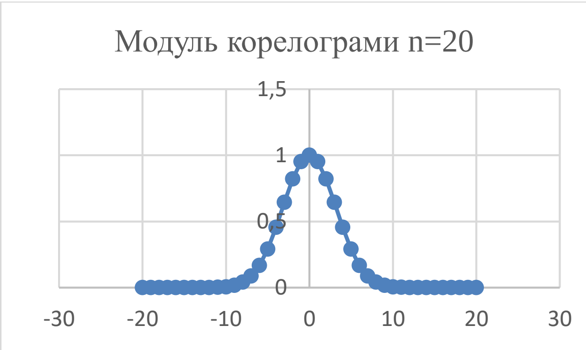
На наступних малюнках зображені корелограми стохастичних процесів, що отримані з процесу гаусового білого шуму ($\varepsilon(n)$ -некорельовані, нормально розподілені $N(0,1)$ випадкові величини) за допомогою взяття послідовних різниць Δ^n.

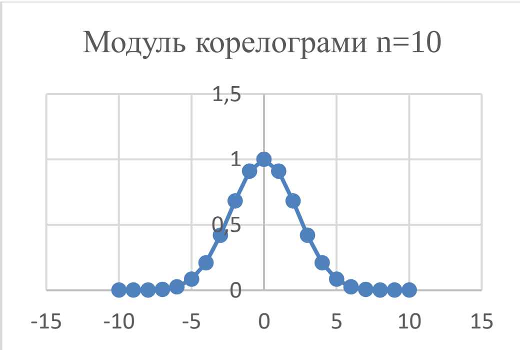




Модулі цих корелограм $\left|\rho_j\right| = \dfrac{n!n!}{(n+j)!(n-j)!}$ сталим множником ρ_0 відрізняються від біноміального розподілу (центрованого): $\left\{ \begin{pmatrix} 2n \\ n+j \end{pmatrix}, \quad -n \le j \le n \right\}$.
Згідно центральної граничної теореми, такій біноміальний розподіл прямує до нормального, коли $n \to \infty$.

Це добре ілюстроване на наступних малюнках, де зображені модулі корелограм.





Коефіцієнти автокореляції с достатньої точністю наближаються до кривої щільності нормального розподілу (з відповідним множником).

Знайдені вирази для спектральної щільності та передаточної функції $g_{\Delta^n}(\omega) = g_n(\omega)$ та $g_n(z)$ можна використовувати для обчислення дії операторів Δ^n на інші стохастичні процеси, тому що, спектр вихідного процесу отримується множенням спектра вхідного процесу на спектральну функцію лінійного оператора.

4. Скінчени різниці як цифрові фільтри.

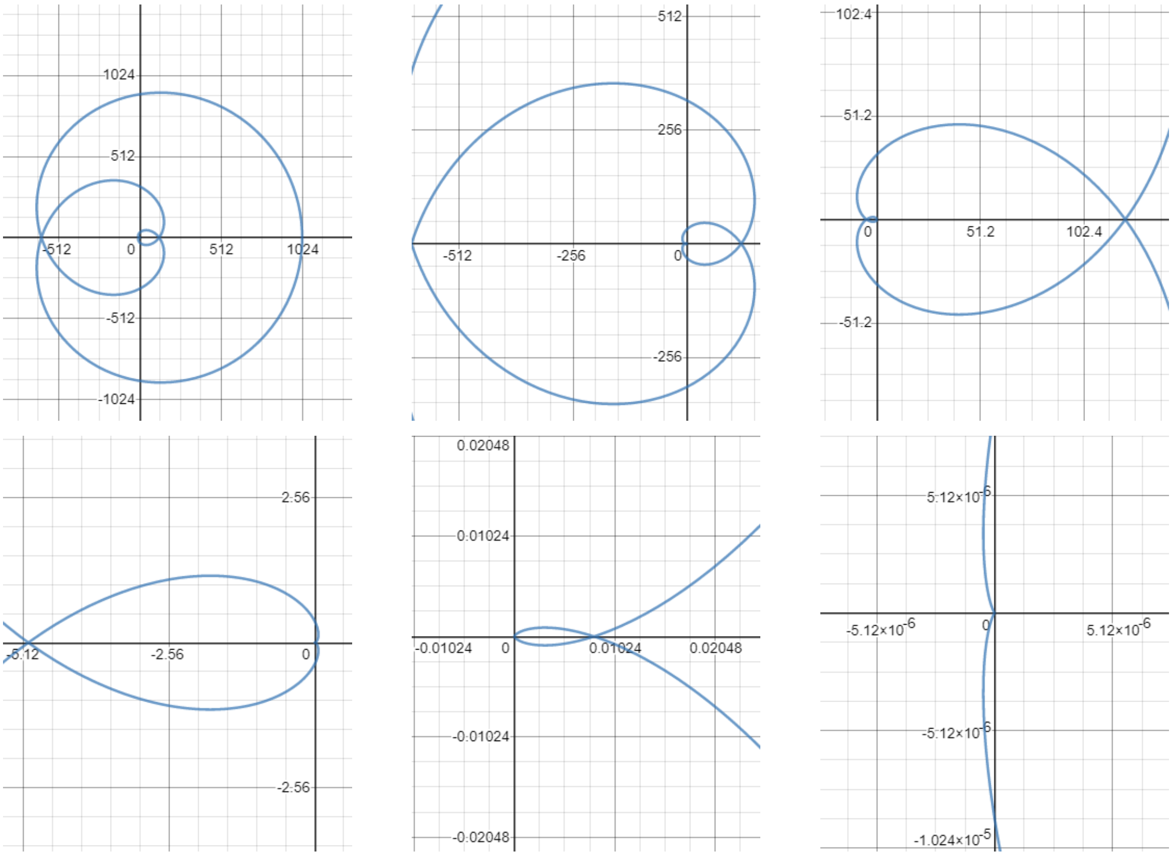
Дію лінійного оператора на вхідний стохастичний процес можна розглядати як цифровий фільтр, що перетворює спектр вхідного процесу на спектр вихідного, послабляючи або підсилюючи певні частоти. Спектральну функцію оператора Δ^n, враховуючи обчислення п.2 можна представити у вигляді:

$$g_n(\omega) = \frac{1}{2\pi}(1-e^{i\omega})^n(1-e^{-i\omega})^n = \frac{1}{2\pi}H_n(e^{i\omega})H_n(e^{-i\omega})$$

$$H(e^{i\omega})H(e^{-i\omega}) = 2\sin(\frac{\omega}{2})e^{i(\pi-\omega)/2}2\sin(\frac{-\omega}{2})e^{i(\pi+\omega)/2} = 4\sin^2(\frac{\omega}{2})$$

Тоді $g_n(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}2^{2n}\sin^{2n}(\dfrac{\omega}{2})$ спектр потужності. $\left|H_n(\omega)\right| = 2^n\left|\sin^n(\dfrac{\omega}{2})\right|$ – коефіцієнт підсилення.

Передавальна функція $H_n(e^{i\omega}) = 2^n\sin^n\dfrac{\omega}{2}\exp(in(\dfrac{\pi-\omega}{2}))$ як функція аргументу ω зображає на комплексної площині деяку криву лінію. Для великих значень n ця лінія набуває фрактальних властивостей в околі нуля – при збільшенні масштабу вона повторює сама себе. Наступні малюнки ілюструють це явище для $n=10$.



Застосування оператора скінченних різниць дозволяє позбутися в стохастичному процесі поліноміального тренду, це найпоширеніший метод зведення нестаціонарного процесу до стаціонарного вигляду. Тому особливого значення набуває знання точних формул для таких різницевих операторів.

Список використаної літератури

1. Fuller, W.A. (1996). Introduction to Statistical Time Series. 2nd ed. Wiley series in probability and statistics, N.Y. 698 p.
2. Papoulis, A. (2018). Signal analysis. Dover Publications, N.Y. 448 p.
3. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – Изд. 5-е. – Москва: УРСС, 2018. – 376 с.
4. Ambardar, A. (1999). Analog and Digital Signal Processing. 2nd ed. Brooks, N.Y. 807 p.
5. Hamilton, J.D. (1994). Time series analysis. Princeton University Press. 799 p.
6. Kitagawa, G. (2010). Introduction to Time Series Modeling. Chapman & Hall/CRC. 296 p.
7. Brockwell, P.J., Davis, R.A. (2002). Introduction to Time Series and Forecasting. Springer Texts in Statistics. 434 p.
8. Koopmans, L.H. (1995). The spectral analysis of times series. Academic Press. 366 p.