

УДК 681.513.2

С.М. ЛІСОВЕЦЬ, І.Л. КИВА, О.І. ЗУБАЧ
Київський національний університет технологій та дизайну

СИНТЕЗ ЦИФРОВИХ РЕГУЛЯТОРІВ ШЛЯХОМ ЗАДАННЯ СТЕПЕНІВ СТІЙКОСТІ І КОЛИВАЛЬНОСТІ АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Розглянуто синтез цифрових регуляторів, які характеризуються коефіцієнтом підсилення та мають один нуль і один полюс. На прикладі типового об'єкта керування другого порядку показано, що такі регулятори можна синтезувати таким чином, щоб результуюча автоматизована система керування мала степені стійкості і коливальності не гірше заданих. Це досягається розміщенням трьох коренів характеристичного рівняння такої системи на z -площині таким чином, щоб вони не виходили за межі зон, обмежених лініями постійного степеня стійкості і постійного степеня коливальності.

Перехідний процес в такій системі, отриманий в результаті моделювання в пакеті Simulink, показав свою відповідність заданим степеням стійкості і коливальності.

Межа зони, яка є лінією постійного степеня стійкості на z -площині, представляє собою коло – із збільшенням степеня стійкості радіус такого кола зменшується. Межа зони, яка є лінією постійного степеня коливальності на z -площині, представляє собою спіраль – із зменшенням степеня коливальності розміри такої спіралі також зменшуються. Таким чином, z -площина умовно розділяється на чотири зони: зону I, в якій не виконуються умови ні заданого степеня стійкості, ні заданого степеня коливальності; зону II, в якій виконується умова заданого степеня стійкості; зону III, в якій виконується умова заданого степеня коливальності; зону IV, в якій виконуються умови і заданого степеня стійкості, і заданого степеня коливальності.

Таке розміщення коренів характеристичного рівняння досягалося розв'язанням системи з трьох рівнянь, в яку в якості невідомих входили коефіцієнт підсилення цифрового регулятора, його один нуль і його один полюс.

Необхідно зауважити, що, з одного боку, наявність заданих степенів стійкості і коливальності не виключає, наприклад, наявності у автоматизованої системи керування статичної похибки. Але при цьому, з іншого боку, можна підібрати цифровий регулятор з більш складною структурою і, виконавши аналогічні обчислення, зробити таку систему астатичною, внаслідок чого статична похибка буде дуже малою або взагалі буде відсутньою.

Ключові слова: автоматизована система керування, інтервал дискретизації, кореневий годограф, ступінь стійкості, ступінь коливальності, цифровий регулятор.

С.Н. ЛІСОВЕЦЬ, І.Л. КИВА, Е.И. ЗУБАЧ
Киевский национальный университет технологий и дизайна

СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПУТЁМ ЗАДАНИЯ СТЕПЕНЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрено синтез цифровых регуляторов, которые характеризуются коэффициентом усиления и имеют один нуль и один полюс. На примере типового объекта управления второго порядка показано, что такие регуляторы можно синтезировать таким образом, чтобы результирующая автоматизированная

система управління мала ступені устойчивості і коливальності не гірше заданих. Це досягається розміщенням трьох коренів характеристичного рівняння такої системи на z -площині таким образом, щоб вони не виходили за межі зон, обмежених лініями постійної ступені устойчивості і постійної ступені коливальності.

Перехідний процес в такій системі, отриманий в результаті моделювання в пакеті *Simulink*, показав своє відповідність заданим ступеням устойчивості і коливальності.

Границя зони, яка є лінією постійної ступені устойчивості на z -площині, представляє собою коло – з збільшенням ступені устойчивості радіус такого кола зменшується. Границя зони, яка є лінією постійної ступені коливальності на z -площині, представляє собою спіраль – з зменшенням ступені коливальності розміри такої спіралі також зменшуються. Таким образом, z -площина умовно розділяється на чотири зони: зону I, в якій не виконуються умови ні заданої ступені устойчивості, ні заданої ступені коливальності; зону II, в якій виконується умова заданої ступені устойчивості; зону III, в якій виконується умова заданої ступені коливальності; зону IV, в якій виконуються умови і заданої ступені устойчивості, і заданої ступені коливальності.

Таким чином розміщення коренів характеристичного рівняння досягалося рішенням системи з трьох рівнянь, в яку в якості невідомих входили коефіцієнт посилення цифрового регулятора, його один нуль і його один полюс.

Необхідно зауважити, що, з однієї сторони, наявність заданих ступеней устойчивості і коливальності не виключає, наприклад, наявності у автоматизованій системі управління статическої помилки. Але при цьому, з іншої сторони, можна підібрати цифровий регулятор з більш складною структурою і, виконавши аналогічні обчислення, зробити таку систему астатическою, внаслідок чого статическа помилка буде дуже малою або взагалі буде відсутньою.

Ключові слова: автоматизована система управління, інтервал дискретизації, корневої годограф, ступінь устойчивості, ступінь коливальності, цифровий регулятор.

S.M. LISOVETS, I.L. KIVA, O.I. ZUBACH
Kyiv National University of Technologies and Design

SYNTHESIS OF DIGITAL CONTROLS BY SETTING THE STABILITY AND OSCILLATION DEGREES OF AUTOMATED CONTROL SYSTEMS

The synthesis of digital controllers, which are characterized by a gain and have one zero and one pole, is considered. Using the example of a typical second-order control object, it is shown that such controllers can be synthesized in such a way that the resulting automated control system has degrees of stability and oscillation no worse than the specified ones. This is achieved by placing the three roots of the characteristic equation of such a system on the z -plane so that they do not go beyond the zones bounded by the lines of constant degree of stability and constant degree of oscillation.

The transient process in such a system, obtained as a result of modeling in the Simulink package, showed its compliance with the specified degrees of stability and oscillation.

The border of the zone, which is a line of constant degree of stability on the z -plane, is a circle – with an increase in the degree of stability, the radius of such a circle decreases. The

border of the zone, which is a line of constant degree of oscillation on the z -plane, is a spiral – with a decrease in the degree of oscillation, the dimensions of such a spiral also decrease. Thus, the z -plane is conventionally divided into four zones: zone I, in which the conditions of neither a given degree of stability, nor a given degree of oscillation are satisfied; zone II, in which the condition of a given degree of stability is satisfied; zone III, in which the condition of a given degree of oscillation is satisfied; zone IV, in which the conditions of both a given degree of stability and a given degree of oscillation are satisfied.

Such an arrangement of the roots of the characteristic equation was achieved by solving a system of three equations, which included the gain of the digital controller, its one zero and its one pole as unknowns.

It should be noted that, on the one hand, the presence of specified degrees of stability and oscillation does not exclude, for example, the presence of a static error in the automated control system. But at the same time, on the other hand, it is possible to choose a digital controller with a more complex structure and, having performed similar calculations, make such a system astatic, as a result of which the static error will be very small or absent altogether.

Keywords: automated control system, sampling interval, root hodograph, degree of stability, degree of oscillation, digital controller.

Постановка проблеми

Синтез регуляторів, які б забезпечували для автоматизованих систем керування степені стійкості і коливальності не гірше заданих, є непростою задачею. Часто для такого синтезу використовуються кореневі годографи [1]. Кореневі годографи як на s -площині для неперервних автоматизованих систем керування, так і на z -площині для дискретних автоматизованих систем керування можна використовувати як для аналізу, так і для синтезу таких систем. Суть кореневого годографа полягає в тому, що отримують характеристичне рівняння автоматизованої системи керування, в якому один з параметрів такої системи (наприклад, коефіцієнт підсилення цифрового регулятора) виступає в якості незалежної змінної.

Змінюючи такий параметр в допустимих межах, будують розподіл коренів характеристичного рівняння на z -площині: такий розподіл і є корневим годографом. Кореневі годографи на z -площині будуються таким же самим чином, як і кореневі годографи на s -площині. Відповідність між s - і z -площинами здійснюється шляхом взаємного перетворення

$$z = e^{Ts}, \quad (1)$$

де T – інтервал дискретизації.

Але, якщо межею стійкості на s -площині є вісь ординат, то межею стійкості на z -площині є одиничне коло, для якого виконується вимога $|z|=1$. Синтез цифрових регуляторів на z -площині за допомогою корневих годографів зводиться, по суті, до того, щоб отримати структуру і налаштування цифрового регулятора таким чином, щоб корені і нулі замкненої автоматизованої системи керування на z -площині займали потрібне положення відповідно до потрібної якості перехідних процесів.

Якщо на z -площині побудований корневий годограф дискретної системи керування, то по траєкторіях коренів її характеристичного рівняння можна робити висновки не тільки про стійкість, але і про запас стійкості автоматизованих систем керування. Отже, синтез цифрових регуляторів з використанням корневих годографів зводиться до дослідження положення коренів характеристичного рівняння відносно наступних ліній: степеня стійкості і степеня коливальності [1–3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Згідно із визначенням, степінь стійкості h відповідає найменшому за модулем від'ємному дійсному кореню або найменшій за модулем від'ємній дійсній частині комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння дискретної системи керування. Якщо на s -площині задана лінія постійного степеня стійкості h , то на z -площині вона буде відображатися як коло з радіусом

$$z = e^{-Th} \quad (2)$$

і центром в початку координат (див. рис. 1).

Якщо задатися кількома степенями стійкості h , то лінії постійного степеня стійкості h будуть мати вигляд концентричних кіл із центрами в початку координат z -площини.

Також, згідно із визначенням, степінь коливальності μ відповідає максимальному за модулем відношенню уявної частини комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння автоматизованої системи керування до їх від'ємної дійсної частини (при наявності тільки від'ємних дійсних коренів степінь коливальності $\mu = 0$).

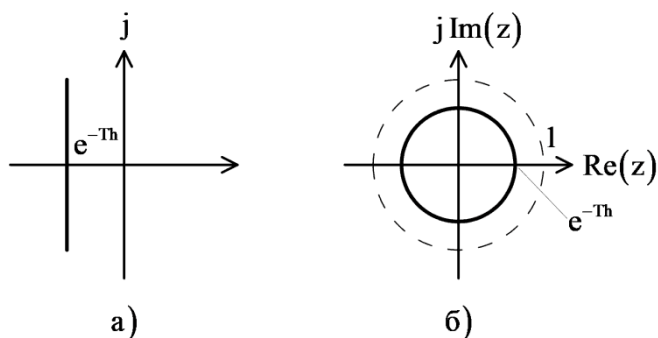


Рис. 1. Відповідність між степенями стійкості h на s - і z -площинах.

Якщо на s -площині задана лінія постійного степеня коливальності μ , то на z -площині вона буде відображатися як логарифмічна спіраль (див. рис. 2), яка описується наступними рівняннями:

$$\begin{cases} \text{Re}(z) = e^{-\frac{\omega T}{\mu}} \cos(\omega T); \\ \text{Im}(z) = e^{-\frac{\omega T}{\mu}} \sin(\omega T), \end{cases} \quad (3)$$

де ω – колова частота.

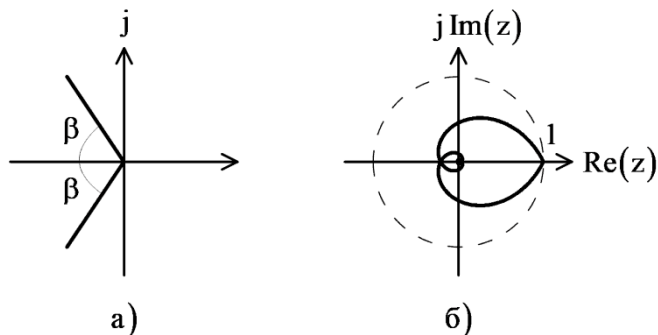


Рис. 2. Відповідність між степенями коливальності μ на s - і z -площинах.

Якщо задатися кількома степенями коливальності μ , то лінії постійного степеня

коливальності μ будуть мати вигляд, наведений на рис. 3.

При цьому кут β пов'язаний із степенем коливальності μ наступним чином:

$$\beta = \operatorname{arctg}(\mu). \quad (4)$$

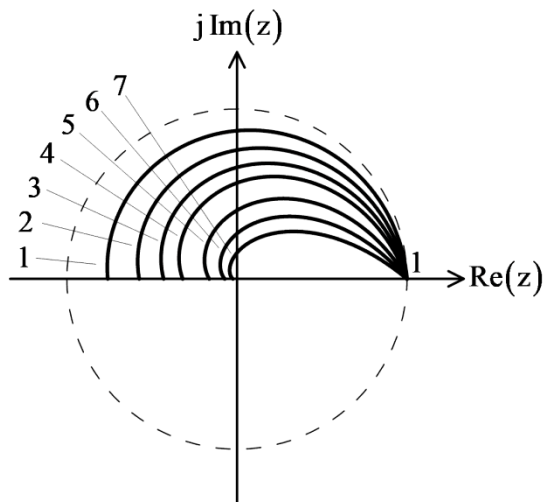


Рис. 3. Лінії постійного степеня коливальності μ : 1 – $\mu = 11,4$ ($\beta = 85^\circ$); 2 – $\mu = 5,67$ ($\beta = 80^\circ$); 3 – $\mu = 3,73$ ($\beta = 75^\circ$); 4 – $\mu = 2,75$ ($\beta = 70^\circ$); 5 – $\mu = 1,73$ ($\beta = 60^\circ$); 6 – $\mu = 1,19$ ($\beta = 50^\circ$); 7 – $\mu = 0,839$ ($\beta = 40^\circ$).

Мета дослідження

Багато технологічних об'єктів керування в промисловості, з точки зору теорії автоматичного керування, мають неперервну передатну функцію $W(s)$ або першого порядку у вигляді

$$W(s) = \frac{K}{T_1 s + 1}, \quad (5)$$

або другого порядку у вигляді

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (6)$$

де K – коефіцієнт підсилення; T_1, T_2 – сталі часу.

Таким чином, стоїть задача для таких об'єктів керування синтезувати цифрові регулятори таким чином, щоб вони забезпечували степені стійкості h і коливальності μ не гірше заданих.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай в автоматизованій системі керування використовується цифровий регулятор з коефіцієнтом підсилення K_p , який має один дійсний нуль z_p і один дійсний полюс p_p [1]. Таким чином, передатна функція цифрового регулятора матиме наступний вигляд:

$$C(z) = K_p \frac{z - z_p}{z - p_p}. \quad (7)$$

В залежності від співвідношення між величинами z_p і p_p цифровий регулятор можна характеризувати наступним чином.

Або як фільтр верхніх частот при

$$p_p < z_p, \tag{8}$$

як наведено на рис. 4.

Або як фільтр нижніх частот при

$$z_p < p_p. \tag{9}$$

як наведено на рис. 5.

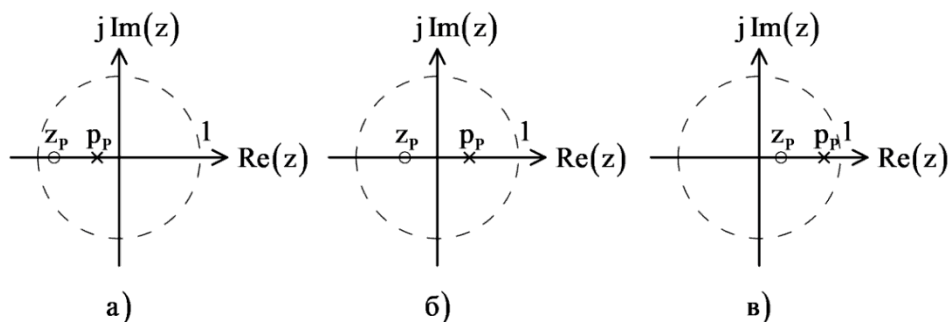


Рис. 4. Розташування нулів і полюсів передатної функції цифрового регулятора $C(z)$ (як фільтра верхніх частот).

Розглянемо об'єкт керування з неперервною передатною функцією другого порядку

$$W(s) = \frac{1}{(10s + 1)(20s + 1)}, \tag{10}$$

Нехай інтервал T квантування становить 2τ (це відповідає типовому часу опитування програмованих логічних контролерів і іншого аналогічного обладнання).

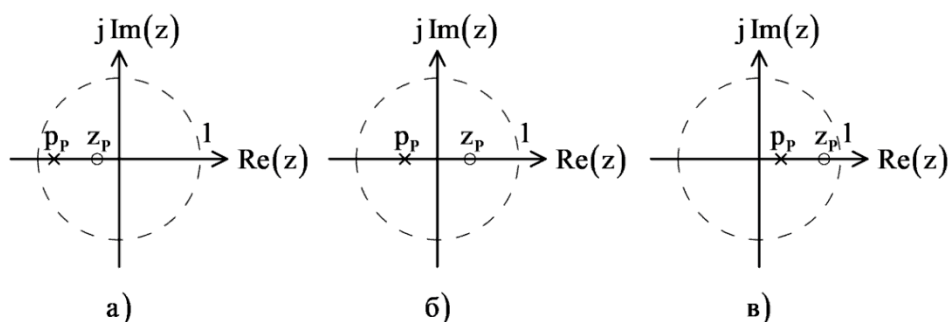


Рис. 5. Розташування нулів і полюсів передатної функції цифрового регулятора $C(z)$ (як фільтра нижніх частот).

При використанні екстраполятора нульового порядку з передатною функцією

$$H(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s} \tag{11}$$

передатна функція аналогової частини автоматизованої системи керування буде мати наступний вигляд:

$$H(s)W(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s(10s+1)(20s+1)}. \quad (12)$$

Розкладаючи цю передатну функцію на елементарні дроби і виконуючи зворотне z -перетворення, отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z} Z\{H(s)W(s)\} &= \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s(10s+1)(20s+1)}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{2(1 - e^{-2s})}{s(20s+1)} - \frac{1 - e^{-2s}}{s(10s+1)}\right\} = \\ &= \frac{0,19032516}{z-0,90483742} - \frac{0,18126925}{z-0,81873075} = \frac{0,00905592z + 0,00819413}{z^2 - 1,72356817z + 0,74081822}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отже, передатна функція автоматизованої системи керування в розімкненому стані матиме наступний вигляд:

$$C(z) \frac{z-1}{z} Z\{H(s)W(s)\} = K_p \frac{z - z_p}{z - p_p} \frac{0,00905592z + 0,00819413}{z^2 - 1,72356817z + 0,74081822}. \quad (14)$$

Відповідно до цього, передатна функція автоматизованої системи керування в замкненому стані матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{C(z) \frac{z-1}{z} Z\{H(s)W(s)\}}{1 + C(z) \frac{z-1}{z} Z\{H(s)W(s)\}} &= \frac{K_p \frac{z - z_p}{z - p_p} \frac{0,00905592z + 0,00819413}{z^2 - 1,72356817z + 0,74081822}}{1 + K_p \frac{z - z_p}{z - p_p} \frac{0,00905592z + 0,00819413}{z^2 - 1,72356817z + 0,74081822}} = \\ &= \frac{K_p (z - z_p)(0,00905592z + 0,00819413)}{(z - p_p)(z^2 - 1,72356817z + 0,74081822) + K_p (z - z_p)(0,00905592z + 0,00819413)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Характеристичне рівняння такої системи матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} z^3 + (0,00905592K_p - 1,72356817 - p_p)z^2 + \\ + (0,74081822 + 0,00819413K_p + 1,72356817p_p - 0,00905592K_pz_p)z + \\ + (-0,74081822p_p - 0,00819413K_pz_p) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Як можна побачити, характеристичне рівняння автоматизованої системи керування має третій порядок і, відповідно до цього, має три кореня z_1 , z_2 і z_3 . В якості прикладу припустимо, що необхідно отримати автоматизовану систему керування, яка має степінь стійкості h не гірше 0,3 і степінь коливальності μ не гірше 1,2. Відповідно до цього, на рис. 6 наведені лінії постійного ступеня стійкості $h = 0,3$ в вигляді кола з радіусом

$$e^{-2 \cdot 0,3} = 0,5488 \quad (17)$$

і постійного ступеня коливальності $\mu = 1,2$ в вигляді спіралі.

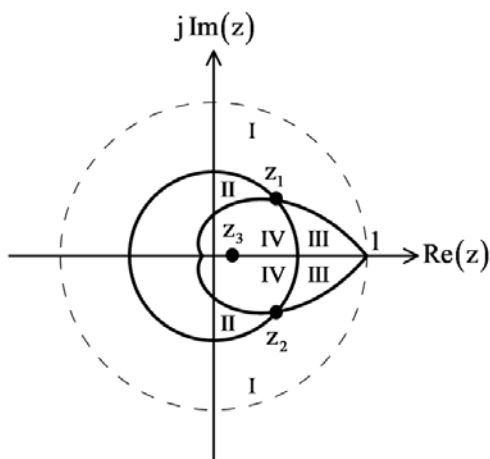


Рис. 6. Лінії постійного степеня стійкості $h = 0,3$ і постійного степеня коливальності $\mu = 1,2$.

В зоні I умови $h > 0,3$ і $\mu < 1,2$ не виконуються. В зоні II виконується умова $h > 0,3$ і не виконується умова $\mu < 1,2$. В зоні III не виконується умова $h > 0,3$ і виконується умова $\mu < 1,2$. В зоні IV виконуються одночасно і умова $h > 0,3$, і умова $\mu < 1,2$. Таким чином, для забезпечення заданих степенів стійкості і коливальності всі три кореня z_1 , z_2 і z_3 не повинні виходити за межі зони IV.

Припустимо, що корені z_1 і z_2 комплексно-спряжені, а корінь z_3 – дійсний. Розмістимо на z -площині ці корені наступним чином. Нехай корені z_1 і z_2 розміщуються в точках перетину меж зон II і III. Розв’язок рівнянь, які описують ці межі, показує, що це точки з координатами $(0,4126; 0,3619j)$ і $(0,4126; -0,3619j)$. Крім цього, розмістимо корінь z_3 в точці $(0,1; 0)$.

Таким чином, в перехідних процесах автоматизованої системи керування складова, яка визначається коренем z_1 , буде дуже швидко загасати, а степені стійкості і коливальності такої системи будуть визначатися переважно складовими, які визначаються коренями z_1 і z_2 .

Отже, характеристичне рівняння автоматизованої системи керування матиме наступний вигляд:

$$(z - 0,1)(z - (0,4126 + 0,3619j))(z - (0,4126 - 0,3619j)) = 0, \quad (18)$$

або ж

$$z^3 - 0,92519946z^2 + 0,38371416z - 0,03011942 = 0. \quad (19)$$

Таким чином, можна отримати наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,00905592K_p - 1,72356817 - p_p = -0,92519946; \\ 0,74081822 + 0,00819413K_p + 1,72356817p_p - 0,00905592K_p z_p = 0,38371416; \\ -0,74081822p_p - 0,00819413K_p z_p = -0,03011942. \end{cases} \quad (20)$$

Ця система рівнянь утримує три рівняння і троє невідомих: K_p , z_p і p_p . Отже, її можна однозначно розв’язати. Розв’язок дає наступні значення невідомих: коефіцієнт

підсилення $K_p = 54,6457$, нуль $z_p = 0,5694$ і полюс $p_p = -0,3035$.

Отже, передатна функція цифрового регулятора (див. формулу (7)) матиме наступний вигляд:

$$C(z) = 54,6457 \frac{z - 0,5694}{z + 0,3035} = \frac{54,6457z - 31,1148}{z + 0,3035}. \quad (21)$$

Перехідний процес в автоматизованій системі керування з неперервним об'єктом керування (10) і цифровим регулятором (21), побудований за допомогою пакета Simulink (рис. 7), наведено на рис. 8 [4].

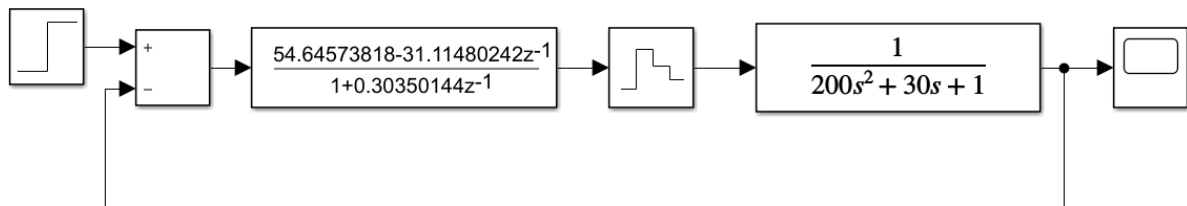


Рис. 7. Модель автоматизованої системи керування в пакеті Simulink.

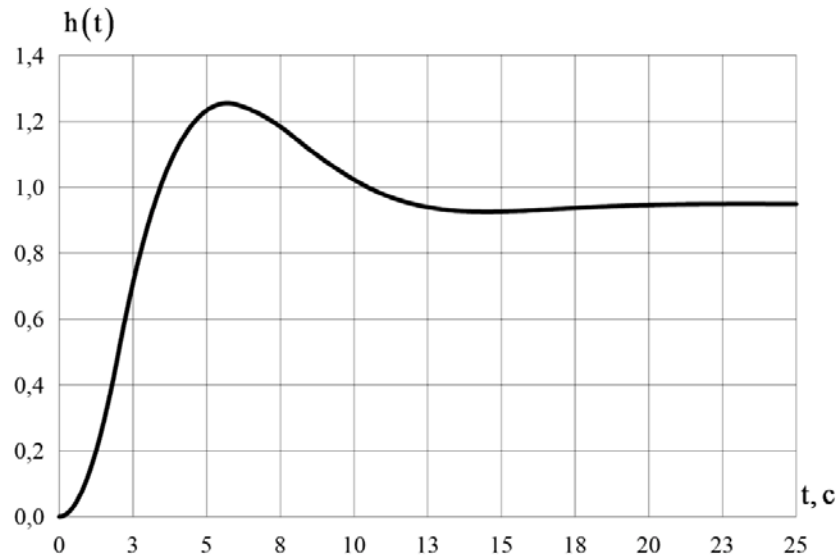


Рис. 8. Перехідний процес в автоматизованій системі керування.

Аналіз перехідного процесу показав відносно непогану відповідність цього процесу заданим степеням стійкості і коливальності.

Наприклад, якщо взяти типову похибку роботи автоматизованої системи керування $\Delta = 5\%$, то відносно усталеного значення перехідного процесу $h_{уст.} = 0,9475$ ширина зони керування становитиме $0,9001 \dots 0,9949$. Відповідно до цього, час керування становитиме $t_{КЕР.} = 10,6$ с.

Згідно з [5], стіпень стійкості по перехідному процесу може бути визначений наступним чином:

$$h = \frac{\ln\left(\frac{100\%}{\Delta}\right)}{t_{КЕР.}} = \frac{\ln\left(\frac{100\%}{5\%}\right)}{10,6 \text{ с}} = 0,2826, \quad (22)$$

що дає значення, дуже близьке до заданого степеня стійкості $h = 0,3$. При цьому треба пам'ятати, що на степінь стійкості h впливають не тільки комплексно-спряжені корені z_1 і z_2 , але й дійсний корінь z_3 .

Висновки

В результаті розрахунку параметрів настроювання цифрового регулятора з трьома незалежними параметрами для об'єкта керування другого порядку шляхом розміщення певним чином трьох коренів характеристичного рівняння автоматизованої системи керування на z -площині було з'ясовано, що таким чином можна для такої системи визначити степені стійкості і коливальності не гірше заданих. В той же час, наявність заданих степенів стійкості і коливальності не виключає наявності у автоматизованої системи керування, наприклад, статичної похибки. Але, підібравши цифровий регулятор з більш складною структурою і виконавши аналогічні обчислення, можна таку систему зробити астатичною, внаслідок чого статична похибка буде дуже малою або взагалі буде відсутньою.

Список використаної літератури

1. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления : пер. с англ. Москва: Машиностроение, 1986. 448 с.
2. Изерман Р. Цифровые системы управления. Москва: Мир, 1984. 541 с.
3. Поляков К. Ю. Основы теории цифровых систем управления. Санкт-Петербург : Санкт-петербургский государственный морской технический университет, 2006. 161 с.
4. Дьяконов В. П., Круглов В. В. MATLAB : анализ, идентификация и моделирование систем : специальный справочник. Санкт-Петербург : Питер, 2001. 448 с.
5. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория автоматического управления : изд. 4-е, перераб. и доп. Санкт-Петербург : Профессия, 2003. 752 с.

References

1. Kuo, B. (1986). Teoriya i proektirovanie tsifrovyykh sistem upravleniya. Moskva: Mashinostroenie [in Russian].
2. Izerman, R. (1984). Tsifrovyye sistemy upravleniya. Moskva: Mir [in Russian].
3. Polyakov, K. Yu. (2006). Osnovy teorii tsifrovyykh sistem upravleniya. Sankt-Peterburg: Sankt-Peterburgskiy Gosudarstvenniy Morskoy Tehnicheskiy Universitet [in Russian].
4. Dyakonov, V. P., & Kruglov, V. V. (2001). MATLAB. Analiz, identifikatsiya i modelirovanie sistem. Spetsialnyy spravochnik. Sankt-Peterburg: Piter [in Russian].
5. Besekersky, V. A., & Popov, E. P. (2003). Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Sankt-Peterburg: Professiya [in Russian].

Лісовець Сергій Миколайович – к.т.н., доцент кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій та вимірювальної техніки Київського національного університету технологій та дизайну, e-mail: ser.lis.290171@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3643-046X.

Ківа Ігор Леонідович – к.т.н., доцент кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій та вимірювальної техніки Київського національного університету технологій та дизайну, e-mail: leonidovich1259@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2920-5312.

Зубач Олена Іванівна – магістрант кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій та вимірювальної техніки Київського національного університету технологій та дизайну, e-mail: zelena1094@gmail.com.