УДК 330:517

О.Л. ЖИРОВ

Національний технічний університет України «КПІ»

ГАРАНТОВАНЕ КВАЗІОПТИМАЛЬНЕ ІНВЕСТУВАННЯ

У цій роботі розглядаються методи оптимізації інвестування, що основуються на оцінюванні кореляційної матриці вектора цінних паперів. В умовах становлення і, як наслідок, нестабільності ринку цінних паперів використати класичні підходи до оптимізації інвестицій досить важко через наявність факторів невизначеності. У таких випадках проблематичним є саме формулювання критеріїв оптимальності та завдання і обчислення міри ризику інвестицій стандартними статистичними методами.

Ключові слова: *гарантоване оцінювання , інвестування, ринок цінних паперів.*

У сучасних методах оцінювання станів економічних систем суттєвим є врахування невизначеностей різних типів. Це призводить до перегляду класичних моделей і підходів. Слід зауважити, що зараз не чітко множинний підхід домінує при виборі методу оцінювання. Це обумовлено його простотою, так як він із легкістю засвоюється навіть студентами других-третіх курсів. Проте, аналіз мір належностей набагато складніший, ніж аналіз ймовірностей у класичних статистичних методах. Потреба отримання більш достовірних результатів призводить до ускладнення і класичних і нових методів. В даній роботі розглядається класичний гарантований (мінімаксний) підхід до узагальнення портфельних задач на основі аналізу кореляційних матриць заважаючих збурень та корисної інформації.

Постановка задачі. Нехай вектор ринкових вартостей цінних паперів описується сумою незалежних векторів x та η розмірності n.

У випадку відомих кореляційних матриць

$$R_{xx} = \mathrm{M}xx^T, \ R_{\eta\eta} = \mathrm{M}\eta\eta^T,$$

співвідношення :

$$\frac{W^{\mathrm{T}} \ \mathrm{M}\eta\eta^T \ W}{W^{\mathrm{T}} \ \mathrm{M}xx^T \ W} = \frac{W^{\mathrm{T}} \ R_{\eta\eta} \ W}{W^{\mathrm{T}} \ R_{xx}W}, \qquad (1)$$

де W – вектор вагових коефіцієнтів розподілу ресурсів по типах цінних паперів, може розумітись, як співвідношення мір ризиків факторів різного типу.

Розглянемо тепер випадок, коли автокореляційна матриця

$$R_{\eta\eta} = \mathrm{M}\eta\eta^T$$

невідома, але відомо , що вона належить області невизначеності (2):

$$\eta \in G = \{\eta : \mathrm{M}(Q_1^{-1}\eta, \ \eta) \le 1\}, \qquad (2)$$

де $Q_1 > 0$ – додатньо визначена, симетрична дійсна матриця.

Тоді Q_1 вона має додатньо визначену, симетричну дійсну обернену матрицю Q_1^{-1} . Додатність і додатня визначеність розуміються як властивості лінійного оператора.

Ставиться задача знаходження мінімального значення співвідношення (1) по області невизначеності (2).

Вирішення поставленої задачі.

Для розв'язку задачі використаємо мінімаксний підхід [1–2], який є одним із головних методів розв'язку задач з невизначеністю в системному аналізі і керуванні складними соціальними системами.

Введемо функціонал $I(W) = \sup_G \dfrac{W^T M \eta\eta^T W}{W^T M x x^T W}$.

Розглянемо задачу оптимального керування

$$I(W) \to \inf_W ,$$

при $\eta \in G$.

Для розв'язку цієї задачі розглянемо характеристичне рівняння

$$\| R_{\eta\eta} - \lambda R_{xx} \| = 0 ,$$

в якому матриця $R_{\eta\eta}$ – невідома, але відома область належності матриці (2). Проблема полягає, перш за все, в тому, що таке рівняння невизначене. Означення: матриця $A(n \times n)$ називається матрицею простої структури, якщо вона має в R^n n лінійно незалежних векторів.

Відомо, що різним власним числам відповідають лінійно незалежні власні вектори, але конкретному власному числу може відповідати кілька незалежних власних векторів.

Будемо розглядати випадок, коли компоненти вектора x – невід'ємні і хоча б один строго більший нуля. Якщо нерівність (2) досяжна, тобто

$$\sup_G \| R_{\eta\eta} \| = \| Q_1 \|$$

при деякому $\eta \in G$, то матимемо класичну мінімаксну постановку проблеми, інакше будемо говорити про квазімінімаксне оцінювання.

Використовуючи узагальнену нерівність Коші-Буняковського [1] для (1), та враховуючи (2)

$$\frac{W^T M \eta\eta^T W}{W^T M x x^T W} \le \frac{W^T Q_1 W M(Q_1^{-1}\eta, \eta)}{W^T R_{xx} W} ,$$

отримаємо рівність

$$\sup_G \frac{W^T Q_1 W \, M(Q_1^{-1}\eta, \eta)}{W^T R_{xx} W} = \frac{W^T Q_1 W}{W^T R_{xx} W} .$$

Таким чином, ми можемо позбавитись від повної невизначеності в співвідношенні та відповідному характеристичному рівнянні і обґрунтували перехід від розгляду невизначеного характеристичного рівняння до рівняння, що має цілком конкретний вид:

$$\| Q_1 - \lambda R_{xx} \| = 0,$$

де Q_1 та R_{xx} – відомі матриці.

Розв`язок характеристичного рівняння полягає в знаходженні таких векторів z, що

$$Q_1 z = \lambda R_{xx} z ,$$

$$R_{xx}^{-1} Q_1 z = \lambda z. \quad (3)$$

Доведемо, що матриця $R_{xx}^{-1}Q_1$ має просту структуру. Для цього використаємо існування для оператора $R_{xx} > 0$ – лінійного, обмеженого, самоспряженого , яким є автокореляційна матриця ненулювого вектора x, оператора $\sqrt{R_{xx}} > 0$, що теж є додатньо-визначеною, симетричною матрицею .

Матриця $\sqrt{R_{xx}}$ має обернену $(\sqrt{R_{xx}})^{-1}$.

Позначимо

$$D = (\sqrt{R_{xx}})^{-1} S \sqrt{R_{xx}},$$

де $S = (\sqrt{R_{xx}})^{-1} Q_1 (\sqrt{R_{xx}})^{-1}$.

Звідси очевидно, що матриця $R_{xx}^{-1}Q_1$ подібна симетричній і тому має просту структуру та дійсні власні числа $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$. Причому найменше з власних чисел $\lambda_1 > 0$ (строго більше нуля) тому, що числа $W^T Q_1 W,\ \ W^T R_{xx} W$ більші нуля.

Для власних векторів $z^1,\ldots,z^n$ виконується рівність

$$z^{iT} R_{xx} z^j = \delta_{ij} \quad (i,j = \overline{1,n}) \tag{4}$$

з якої випливає лінійна незалежність векторів $z^1,\ldots,z^n$.

Таким чином, матриця $Z = (z^1,\ldots,z^n)$ – невироджена, $\det Z \ne 0$.

Підставляючи в (3) замість z конкретне значення z^i та домножаючи зліва на z^{jT}, одержуємо

$$z^{jT} Q_1 z^i = \lambda_i z^{jT} R_{xx} z^{ji} .$$

Враховуючи (4), маємо

$$z^{jT} Q_1 z^i = \lambda_i \delta_{ij} .$$

Або, використовуючи введену матрицю Z, яка утворюється векторами z^i ,

$$Z^T Q_1 Z = (\lambda_i \delta_{ij})_{i,j=1}^n ,$$

$$Z^T R_{xx} Z = E ,$$

де E – одинична матриця.

Оскільки матриця Z – невироджена (через лінійну незалежність стовпчиків), то існує вектор ξ такий, що $W = Z\xi$.

Тоді

$$W^T Q_1 W = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 ,$$

$$W^T R_{xx} W = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 .$$

Дійсно

$$W^T Q_1 W = \xi^T Z^T Q_1 Z \xi = \xi^T (\lambda_i \delta_{ij})_{i,j=1}^n \xi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 ,\ W^T R_{xx} W = \xi^T \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 .$$

Якщо на числовій осі в точках з координатами $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ помістити маси $m_1 = \xi_1^2, \ldots, m_n = \xi_n^2$, то співвідношення

$$\frac{W^T Q_1 W}{W^T R_{xx} W} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}$$

є центром цих мас, отже

$$\frac{W^T Q_1 W}{W^T R_{xx} W} \ge \lambda_1 .$$

Оскільки власному числу λ_1 може відповідати кілька власних векторів $z_1, \ldots, z_{k_{\lambda_1}}$, тому в точці з координатою λ_1 розташована маса

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_{k_{\lambda_1}}^2 .$$

Щоб центр мас співпав з самою лівою точкою розташування мас λ_1 , потрібно щоб всі інші маси поза нею були нульовими,

$$W = \xi_1 z_1 + \ldots + \xi_{k_{\lambda_1}} z_{k_{\lambda_1}} + 0 z_{k_{\lambda_1}+1} + \ldots + 0 z_n =$$

$$= \xi_1 z_1 + \ldots + \xi_{k_{\lambda_1}} z_{k_{\lambda_1}} .$$

Таким чином, ми довели наступні твердження.

Теорема 1. Якщо нерівність, що задає область невизначеності (2) досяжна, то функціонал $I(W)$, в розглянутій задачі, має вид

$$I(W) = \frac{W^T Q_1 W}{W^T R_{xx} W}$$

Теорема 2. Якщо нерівність, що задає область невизначеності (2) досяжна, то мінімаксна оцінка вектора W в співвідношенні $\frac{W^{\mathrm{T}} R_{\eta\eta} W}{W^{\mathrm{T}} R_{xx} W}$ по області невизначеності (2) досягається на власних векторах $z_1, \ldots, z_{k_{\lambda_1}}$, що відповідають мінімальному власному числу λ_1 матриці $R_{xx}^{-1} Q_1$.

Висновки

Отримані результати дозволяють формалізувати задачі квазі оптимального гарантованого інвестування в умовах невизначеності критерію, крім, того, такий підхід дозволяє будувати міри ризику.

Список використаної літератури

1. Жиров О.Л. Мінімаксні оцінки співвідношення сигнал/шум. Праці П'ятої Української конференції з автоматичного управління «Автоматика–98»: 13–16 травня 1998р., – К.: НТУУ «Київський політехнічний інститут», 1998, – ч.ІІІ. – С. 110-112.

2. Жиров О.Л. Аналіз співвідношення шум/сигнал на основі мінімаксних оцінок. Вісник ВПІ. – 2001. – №2 – С. 118-120.

Стаття надійшла до редакції / Article received: 05.06.2013

Гарантированное квазиоптимальное инвестирование

Жиров А.Л.
Национальный технический университет Украины «КПИ»

В этой работе рассматриваются методы оптимизации инвестирования, основанные на оценке корреляционной матрицы вектора ценных бумаг. В условиях становления и, как следствие, нестабильности рынка ценных бумаг использовать классические подходы к оптимизации инвестиций довольно трудно из-за наличия факторов неопределенности. В таких случаях проблематично именно формулирование критериев оптимальности, задания и вычисления степени риска инвестиций стандартными статистическими методами.

Ключевые слова: гарантированное оценивание, инвестирование, рынок ценных бумаг.

The Guaranteed Quasioptimal Investment

A. Jirov
National technical university of Ukraine «KPI»

This paper discusses methods for optimizing investments that are based on the estimation of the correlation matrix of the vector of securities. In the establishment and the consequent instability of the stock market using classical approaches to optimize investment is difficult because of the uncertainties. In such cases, standard statistical methods of formulation of optimality criteria and the setting and calculating the degree of investment risk is problematic.

Keywords: guaranteed valuation, investment, securities market.