УДК 517.5

ОЦІНКИ ДОБУТКУ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ СИМЕТРИЧНИХ НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ

Вигівська Л. В.
Київський національний університет технологій та дизайну

Дана робота присвячена одному з класичних розділів геометричної теорії функцій комплексної змінної, а саме екстремальним задачам про неперетинні області.

Мета дослідження. Метою роботи є розробка нових підходів та методів для розв'язування задач про максимізацію добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних симетричних областей та їх узагальнень.

Об’єкт та предмет дослідження. Об'єктом дослідження є екстремальна задача геометричної теорії функцій комплексної змінної для областей, які не перетинаються, з вільними полюсами на колі. Предметом дослідження є задача про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних симетричних областей.

Методи дослідження. При розв'язанні завдань дисертаційної роботи використовуються методи комплексного аналізу, теорії потенціалу і квадратичних диференціалів.

Нехай $\mathbb{N}, \mathbb{R}, -$ множина натуральних чисел та дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{C} -$ комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} -$ розширена комплексна площина або сфера Рімана. На розширеній комплексній площині розглянемо систему взаємно неперетинних областей $B_k, k = \overline{0,n}$, тобто $B_k \cap B_p = \emptyset, k \neq p, k, p = \overline{0,n}$, причому області $B_k, k = \overline{1,n}$, симетричні відносно одиничного кола.

Нехай $r(B,a) -$ внутрішній радіус області B відносно точки a. Внутрішній радіус пов'язаний з узагальненою функцією Гріна $g_B(z,a)$ області B наступними співвідношеннями

$$g_B(z,a) = -ln|z-a| + \ln r(B,a) + o(1),\ z \to a,$$
$$g_B(z,\infty) = -ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1),\ z \to \infty.$$

Для довільного набору різних точок одиничного кола $a_k,\ k = \overline{1,n},\ \ a_1 = 1$ введемо позначення

$$\alpha_k := \frac{1}{\pi} arg \frac{a_{k+1}}{a_k}, a_{n+1} := a_1, k = \overline{1,n}, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

Розглянемо наступну задачу.

Задача. Знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0,0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k),$$

на системі взаємно неперетинних областей $B_k, k = \overline{0,n}$, причому області $B_k, k = \overline{1,n}$, симетричні відносно одиничного кола, при $\gamma \in (0,n], n \geq 2$, де $r(B_k,a_k) -$ внутрішній радіус області B_k відносно точки a_k, за умови, що $a_0 = 0, |a_k| = 1, k = \overline{1,n},\ a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Розв’язок даної задачі в деяких часткових випадках отримано у роботах [3,4,5]. Дана робота присвячена вивченню цієї задачі при $\gamma \in (1, \sqrt[5]{n}]$ та $n \geq 14$.

Доведено, що при $\gamma > n$ ця задача не має розв’язку. У випадку однозв’язних областей та конформних радіусів подібні задачі розглядались в роботі [1]. В 1994 році при $\gamma = 1, n \geq 2$ ця задача була поставлена в якості відкритої проблеми в роботі [2]. В 2000 році Л. В. Ковальов в роботі [3] отримав її розв’язок. В 2017 році дана задача для $\gamma \in (0,1], n \geq 2$ розв’язана в роботі [5]. В даній роботі наведений наступний результат.

Теорема 1. [5] Для довільного $\gamma > 1$ існує таке $n_0(\gamma) \in \square$, що для кожного $n..n_0(\gamma)$, для довільної системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0 \in B_0 \subset \overline{\square}$, $a_k \in B_k \subset \square$, $k = \overline{1,n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно одиничного кола, виконується нерівність

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},$$

де $a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, --- полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2,$$

відповідно, причому $|a_k^{(0)}|=1$ для $k=\overline{1,n}$, $a_0^{(0)}=0$, $a_k^{(0)}\in B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$.

Знак рівності в цій нерівності досягається, якщо $a_k = a_k^{(0)}$, $B_k = B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$.

Приклад. Нехай $n=3$ і $\gamma>1$. Тоді схематична структура траєкторій квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2,$$

у екстремальному випадку буде наступна

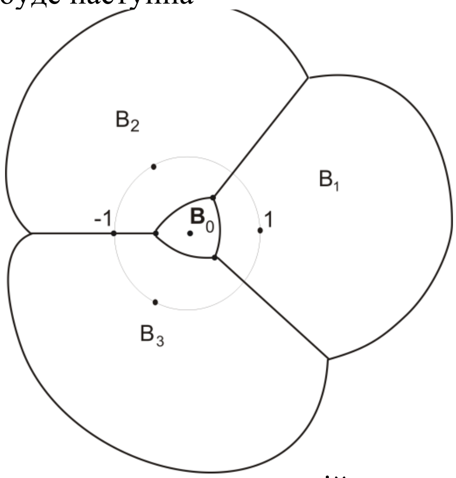

Рисунок 1 – схематична структура траєкторій квадратичного диференціала у екстремальному випадку при $n=3$ і $\gamma>1$.

Ключові слова: неперетинні системи областей, конформний і внутрішній радіуси області, функція Гріна області, розділяюче перетворення, полюси і кругові області квадратичного диференціала.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бахтина Г.П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей. *Современные вопросы вещественного и комплексного анализа.* Киев: Ин-т математики АН УССР. 1984. С. 21 – 27.
2. Дубинин В.,Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного. *Успехи мат. наук*. 1994. Т. 49, № 1(295). С. 3 – 76.
3. Ковалев Л.В. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей. *Изв. вузов. Матем*. 2000. Т. 6. С. 3 – 7.
4. Zabolotnii Ya. V., Vyhivska L.V. On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 231, No. 1. – P.~101 – 109.
5. Vyhivska L.V. On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018. Vol. 229, No. 1. P. 108 – 113.