УДК 519.237.5

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОГО І ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ СИСТЕМ ІЗ СКІНЧЕННОЮ МНОЖИНОЮ СТАНІВ МАРКІВСЬКОГО ТИПУ

Студ. В.С. Рослов
Науковий керівник проф. С.М. Краснитський
Київський національний університет технологій та дизайну

Мета роботи - розробити математичне і програмне забезпечення для дослідження асимптотичної поведінки систем із скінченною множиною станів марківського типу.

Для досягнення мети дослідження необхідно вирішити наступні задачі: розробити математичну модель для прогнозування асимптотичної поведінки систем із скінченною множиною станів марківського типу; розробити програмне забезпечення для прогнозування асимптотичної поведінки систем із скінченною множиною станів марківського типу; порівняти отримані результати.

Об'єкт та предмет дослідження. Об'єктом дослідження є асимптотична поведінка системи із скінченною множиною станів марківського типу. Предметом дослідження є математична модель асимптотичної поведінки системи із скінченною множиною станів марківського типу.

Методи та засоби дослідження. При побудові алгоритму дослідження асимптотичної поведінки використовувалися: основні положення математичного моделювання; елементи теорії ймовірностей; теорія скінченних ланцюгів Маркова методи обчислювальної лінійної алгебри;

Для програмної реалізації розробленого алгоритму використовувалася мова програмування JavaScript специфікації ES6 .

Наукова новизна та практичне значення отриманих результатів. Наукова новизна отриманих результатів проведеного дослідження полягає в розробці комп'ютерної моделі для реалізації теоретичних положень та методичних рекомендацій щодо дослідження асимптотичної поведінки систем.

Результати дослідження.

Нехай $f_{ij}^{(k)} = P_i\{\xi_k = j, \xi_i \neq j, 1 \le i \le k-1 \mid \xi_i = i\}$; величину $f_{ij}^{(k)}$ можна інтерпретувати як імовірність вперше потрапити зі стану i в стан j на k-му кроці. $f_{ii}^{(k)}$, відповідно, називають ймовірністю першого повернення в стан i через k кроків.

Нехай $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$. f_{ij} інтерпретується як імовірність того, що марківський процес перейде зі стану i в стан j за скінченне число кроків.

Виходячи із значення f_{ij}, стан i відносять до одного з двох типів

Стан i називається зворотним, якщо $f_{ij} = 1$, і незворотним, якщо $f_{ij} < 1$.

Кожен зворотний стан можна віднести до одного з двох підтипів в залежності від скінченності або нескінченності середнього часу повернення у даний стан.

Зворотній стан називається **позитивним**, якщо

$$\mu_i^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}\right)^{-1} > 0$$

і **нульовим**, якщо

$$\mu_i^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}\right)^{-1} = 0$$

Позитивному зворотному стану відповідає скінченний середній час повернення, а нульового - нескінченний.

Стан i зворотний тоді і тільки тоді, коли $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

Якщо j зворотний і $j \leftrightarrow i$, то стан i теж зворотний.

Якщо стан j незворотний, то для будь-якого стану і $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$, а значить $p_{ij}^{(n)} \to 0 \ (n \to \infty)$.

Нехай стан j є аперіодичне $(d\,(j) = 1)$ поворотним станом і $i \leftrightarrow j$. Тоді $p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j} = \begin{cases} > 0, \text{ якщо } j - \text{ позитивний стан} \\ = 0, \text{якщо } j - \text{нульовий стан} \end{cases}$, де $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$

Нехай i і j належать різним класам. Тоді $p_{ij}^{(n)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}$

Лемма. Нехай стан j зворотний з періодом $d = d\,(j) > 1$

1) Нехай $i \leftrightarrow j$ і , де C_p - циклічний підклас.
Нехай Тоді $p_{ij}^{(nd+a)} \to \frac{d}{\mu_j}$.

2) Нехай i - довільний стан (можливо, і $i \leftrightarrow j$). тоді

$$p_{ij}^{(nd+a)} \to \left(\sum_{r=0}^{\infty} f_{ij}^{(rd+a)}\right)\frac{d}{\mu_j}, \quad a = 0,1,\dots,d-1.$$

Для марківського ланцюга ξ із скінеченною множиною можливих станів наступні твердження еквівалентні:

1) Марківського ланцюг нерозкладний і аперіодичний;

2) Всі стани ланцюга позитивні зворотні;

3) Марківський ланцюг ергодичний;

Висновки. Програмне забезпечення, що реалізує вищеописані кроки, дозволить раціоналізувати роботу дослідника та дозволить ефективно впровадити це на практиці, а саме – дасть змогу ефективно використовувати ці методи в різних галузях .

Ключові слова: *стохастичні процеси, марківські ланцюги, зворотні і незворотні стани.*

ЛІТЕРАТУРА

1. М.В. Карташов Асимптотика пропріджених марковських моментів на неоднорідних за часом дискретних ланцюгах Маркова, Теорія ймовір. та матем. статист. 88 (2013), 83-94.

2. M. V. KARTASHOV. Qualitative and qualitative limits for exponential asymptotics of hitting times for birth-and-death chains in a scheme of series, Теорія ймовір. та матем. статист. 89 (2013), 41-51.